



Digitalna obrada slike

Lekcija VI

Transformacije – Korak dalje

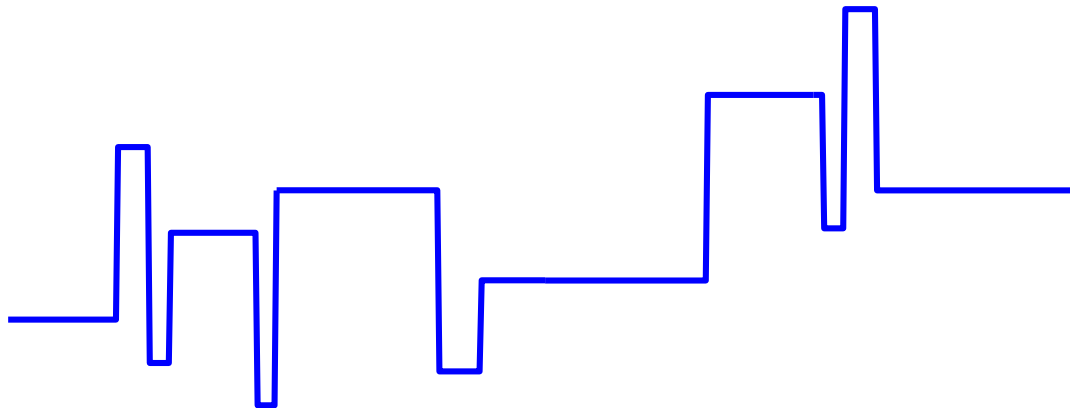


Korak dalje

- Do sada smo se upoznali sa diskretnim sinusoidalnim transformacijama.
- Koncept ovakvih transformacija bi trebao biti jednom elektro inženjeru veoma blizak.
- Međutim, savremena nauka je u poslednjih desetak godina razvila mnoge druge transformacije koje su našle primjenu u brojnim oblastima.
- Digitalna obrada slike na neki način i prednjači u ovim aplikacijama.
- Koliko nam jedan termin nastave dozvoljava mi ćemo se upoznati sa nekim od tih transformacija.

Profil digitalne slike

- Tipičan profil (osvjetljaj duž jedne linije slike) je dat na narednom dijagramu.



U prosjeku mnoge slike sa malim varijacijama uzimaju konstantne vrijednosti osvjetljaja u nekoliko susjednih piksela pa zatim naglo prelaze na neki drugi osvjetljaj.

Kod filtriranja slike veoma je važno da je energija slike koncentrisana u malom broju transformacionih koeficijenata. Slična osobina je poželjna i kod kompresije slike.



Potreba za pravougaonim transf.

- Ako je energija slike koncentrisana u malom broju transformacionih koeficijenata to znači da ćemo relativno lako pronalaziti te koeficijente i u uslovima šuma i vršiti filtriranje tako što poništimo koeficijente koji su zahvaćeni šumom. Ako je veći broj odbiraka transformacije od značaja to znači da su u prosjeku manji (da je energija slike podijeljena na veći broj) a to dalje vodi činjenici da se u uslovima šuma ovi koeficijenti teže raspoznaju.
- Slično i kod kompresije (sabijanja informacije o slici na što je manji mogući memorijski medijum) od velikog značaja je da se memoriše što je moguće manje koeficijenata transformacije.



Potreba za pravougaonim transf.

- Ako bi izvršili transformaciju profila slike koji je prikazan prije dva slajda na osnovu neke od uvedenih sinusoidalnih transformacija dobili bi transformaciju koja ima veliki broj transformacionih koeficijenata sa relativno velikom snagom (blagim funkcijama kao što su sinusoidalne teško je aproksimirati nagle prekide).
- Stoga se došlo na ideju uvođenja diskretnih pravougaonih transformacija kod kojih će razvoj u red biti obavljan preko pravougaonih periodičnih funkcija.
- Na narednih nekoliko slajdova ćemo uvesti neke od ovih transformacija.



Hadamardova transformacija

- Ovdje ćemo uvesti Hadamardovu transformaciju preko transformacione matrice samo za slučaj $N=2^n$ odbiraka. Postoje i neki drugi specijalni slučajevi.
- Kod Hadamardove transformacije polazi se od matrice:

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Hadamardova transformacija za $N=2$ se definiše sa transformacionom matricom:

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{E}_2$$



Hadamardova transformacija

- Hadamardova transformaciona matrica višeg reda se definiše kao:

$$\mathbf{H}_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{\Xi}_N \quad \text{gdje je} \quad \mathbf{\Xi}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{\Xi}_{N/2} & \mathbf{\Xi}_{N/2} \\ \mathbf{\Xi}_{N/2} & -\mathbf{\Xi}_{N/2} \end{bmatrix}$$

Primjer za
N=8:

$$\mathbf{H}_8 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 7 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \\ 5 \end{matrix}$$

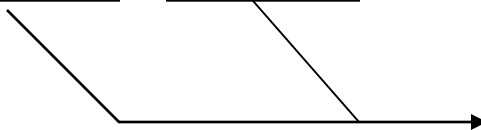
**pored svake
kolone upisali
smo koliko puta
se u toj koloni
promjenio znak
ispred jedinice
(sa 1 na -1 ili
obratno)**



Brza Hadamardova transf.

- Hadamardova transformacija se može realizovati izuzetno brzo. Pretpostavimo da imamo vektor \mathbf{x} kojeg množimo sa Ξ_N (ovo na kraju množimo sa multiplikativnom konstantom koja za sada nije previše bitna).

$$\Xi_N \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Xi_{N/2} & \Xi_{N/2} \\ \Xi_{N/2} & -\Xi_{N/2} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Xi_{N/2} & \Xi_{N/2} \\ \Xi_{N/2} & -\Xi_{N/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_{N/2} \mathbf{x}_1 + \Xi_{N/2} \mathbf{x}_2 \\ \Xi_{N/2} \mathbf{x}_1 - \Xi_{N/2} \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$$


\mathbf{x}_1 i \mathbf{x}_2 su prvih $N/2$ odbiraka vektora \mathbf{x} i drugih $N/2$ odbiraka redom.

Transformacije za $N/2$ odbiraka. Znači transformaciju za N odbiraka svodimo kao kod FFT na dvije od po $N/2$ odbiraka. Dalju proceduru provedite sami.



Walshovo uređenje

- Češće se umjesto Hadamardove transformacije koristi preuređena Hadamardova transformacija (to preuređenje se naziva Walshovim a ponekad se i čitava ta transformacija naziva Walshovom). Preuređene se obavlja tako što se na početku matrice postavi onaj red Hadamardove matrice u kojem se nije dogodila nijedna promjena znaka, u narednom se postavi onaj red sa jednom promjenom, pa red sa dvije promjene itd.
- Dakle, vrste Hadamardove transformacije se preurede tako da je broj promjena znaka rastući.
- Hadamardova i Walshova transformacija su ekvivalentne ali se smatra da je Walshovo uređenje prirodnije i da bolje odgovara analogiji sa sinusoidalnim transformacijama.



Walshova matrica - Primjer

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}$$

Walshova transformaciona matrica za N=8.

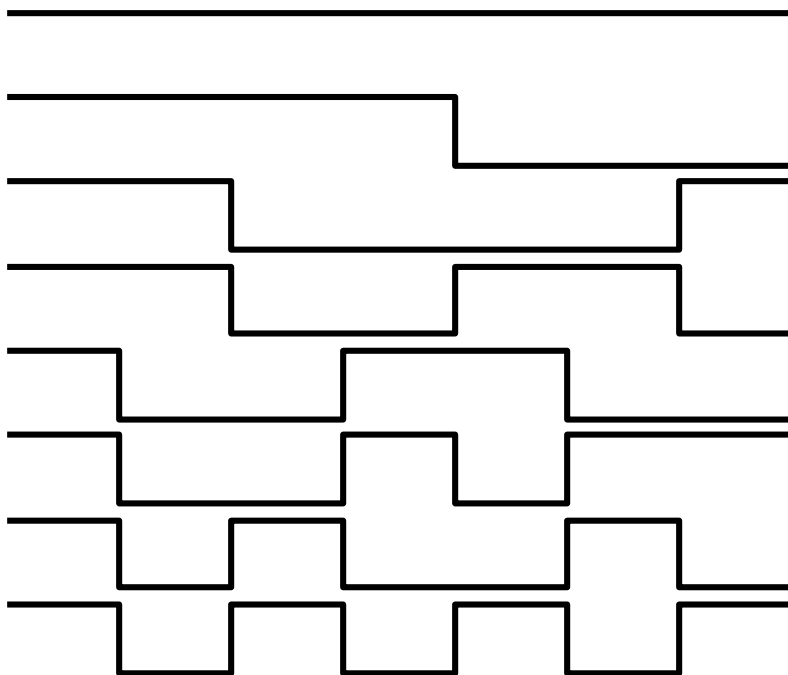
Vaš zadatak (koji možda nije lak) je da odredite inverznu Walshovu transformaciju.

Lakši dio posla je nacrtajte bazisne slike i bazisne signale za Hadamardovu i Walshovu transformaciju.

Pored ovih postoji i niz drugih pravougaonih transformacija signala od kojih su neke date u knjizi. Mi ćemo zbog značaja predstaviti samo Haarov razvoj.



Kolone Walshove matrice



→ funkcija na frekvenciji 0
→ funkcija na frekvenciji "1"

⋮

frekvencija se zatim postepeno
povećava

**Kolone Walshove matrice koje
veoma liče na sinusoidalne
funkcije koje se koriste kod
sinusoidalnih razvoja.**



Haarova transformacija

- Definicija Haarove transformacije nije sasvim jednostavna. Posmatra se cijeli broj **k** koji je u intervalu **$0 \leq k \leq N-1$** koji se prikaže kao: **$k = 2^p + q - 1$** .
- Brojevi **p** i **q** se biraju tako da je **p** najveći cijeli broj za koji je **$2^p \leq k$** .
- Vrijednosti **k** predstavljaju redove u Haarovoj transformacionoj matrici (prvi red ovdje ima index **0** , drugi ima index **1** dok posljednji ima indeks **$N-1$**).
- Neka je drugi indeks (onaj koji odgovara koloni) označen sa **i** i neka i ovaj indeks ide u granicama od **$0 \leq i \leq N-1$** .
- Na osnovu **i** formirajmo vektor **x** koji je jednak **$x = i/N$** .



Haarova transformacija

- Od sada ćemo govoriti o \mathbf{x} imajući u vidu da postoji direktna veza sa indeksom \mathbf{i} .
- Pojedine vrste Haarove transformacione matrice ćemo označiti kao $\mathbf{h}_k(\mathbf{x})$ gdje \mathbf{k} po prethodno utvrđenim pravilima predstavlja indeks vrste.
- Za ove vektore važe sledeća pravila:

$$h_0(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad h_k(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} 2^{p/2} & \frac{q-1}{2^p} \leq x < \frac{q-1/2}{2^p} \\ -2^{p/2} & \frac{q-1/2}{2^p} \leq x < \frac{q}{2^p} \\ 0 & \text{drugdje} \end{cases}$$



Haarova transformacija - Primjer

- Da bi bolje razumjeli Haarovu transformaciju i ulogu (p,q) navešćemo primjer ove matrice za N=8 a pored svake od kolona ćemo navesti i vrijednosti (p,q).

$$H_8 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (0,0) \\ (0,1) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (2,2) \\ (2,3) \\ (2,4) \end{matrix}$$

Uvijek se kao prirodno nameće pitanje što je inverzna matrica u ovom slučaju?

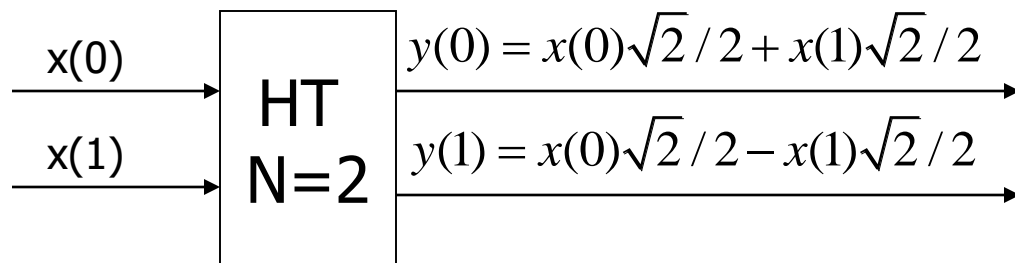


Haarova transformacija (p,q)

- Pokušajmo tumačiti što predstavljaju vrijednosti (p,q).
- Očigledno vrijednost **p** odgovara stepenima koji se pojavljuju u pojedinim vrstama matrice. Stoga se naziva **skalom**.
- Koeficijent **q** definiše poziciju nenultih članova vrste matrice. Stoga se često naziva **pomjeraj**.
- Haarova transformacija biće kasnije iskorišćena da bi uveli izuzetno važan koncept **wavelet**-a (talasića) pa ćemo objasniti neke detalje realizacije ove transformacije.



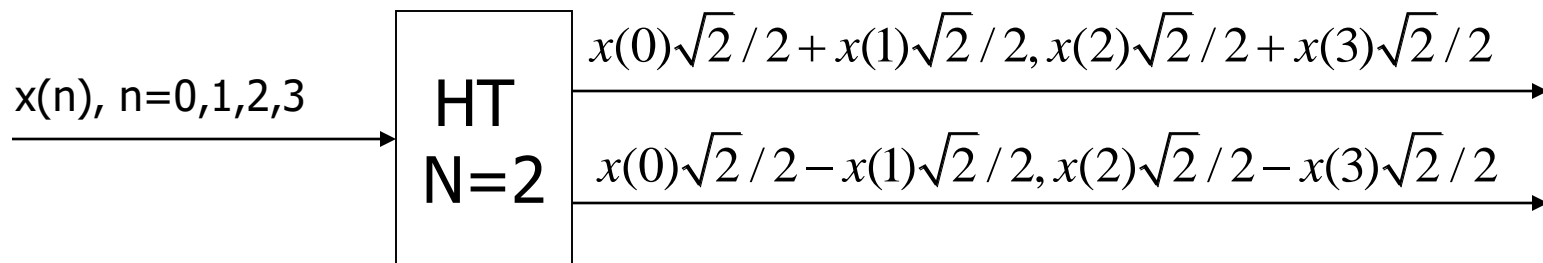
Haarova trans. 2 i 4-odbirka



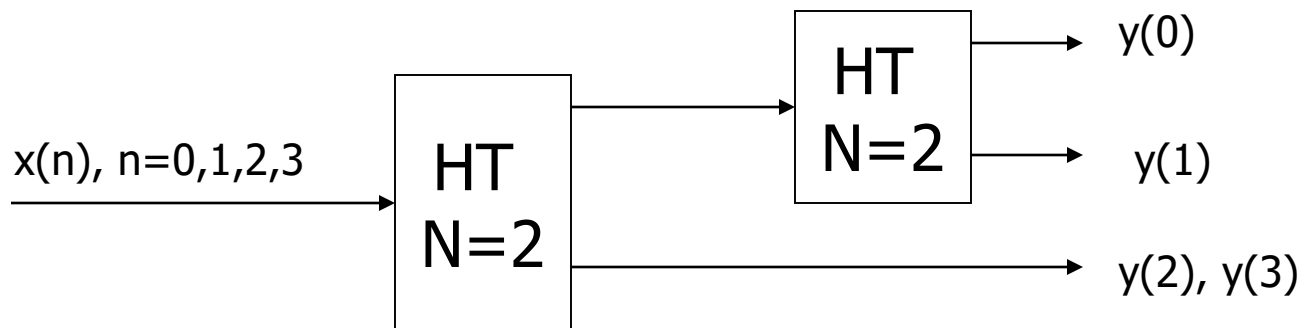
Haarov transformator za N=2 koji se može shvatiti i drugačije tako što se pretpostavi da postoji samo jedna grana kojim dolaze odbirci i da transformator pričekava dok ne stignu dva odbirka i tada izvrši zadatu transformaciju.

- Pretpostavimo da sada želimo odrediti Haarovu transformaciju sa 4 odbirka. Mi ta četiri odbirka ponovo možemo dovesti na ulaz sklopa koji vrši transformaciju sa dva odbirka tako što prvo "prikupi" dva odbirka i odradi transformaciju pa zatim naredna dva i odradi transformaciju. Dobijene rezultati se preko "dvije linije" šalju sukcesivno na izlaz.

Haarova trans. 2 i 4-odbirka



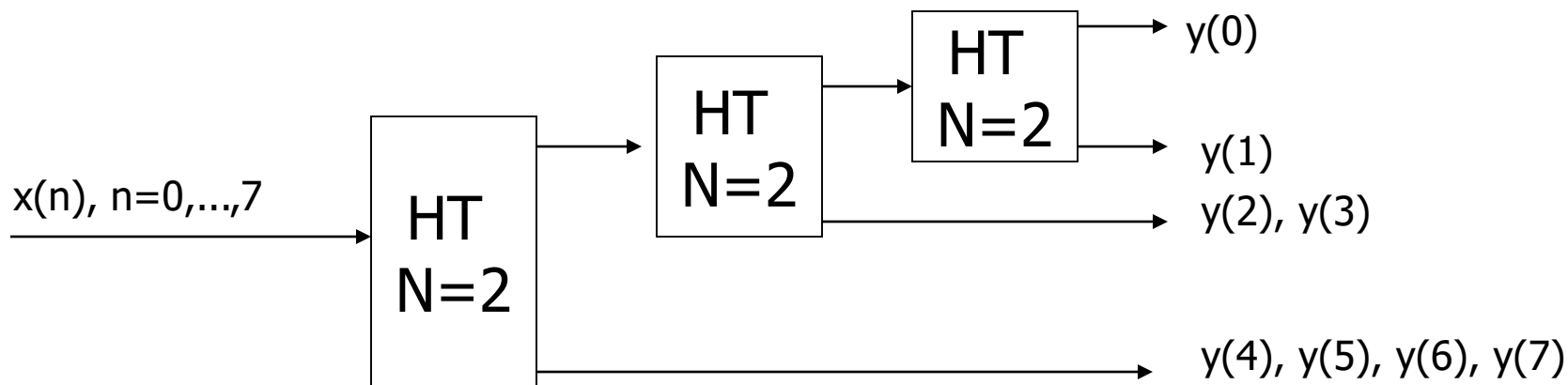
- Ako bismo sada napisali HT za $N=4$ vrlo brzo bi uočili da se donja grana može ostaviti takva kakva jeste dok se na gornju granu treba primijeniti HT za $N=2$ i na taj način dobijamo HT za $N=4$.





Haarova transf. $N=8$

- Haarova transformacija višeg reda se dobija rekurzivno.
Npr. za $N=8$:



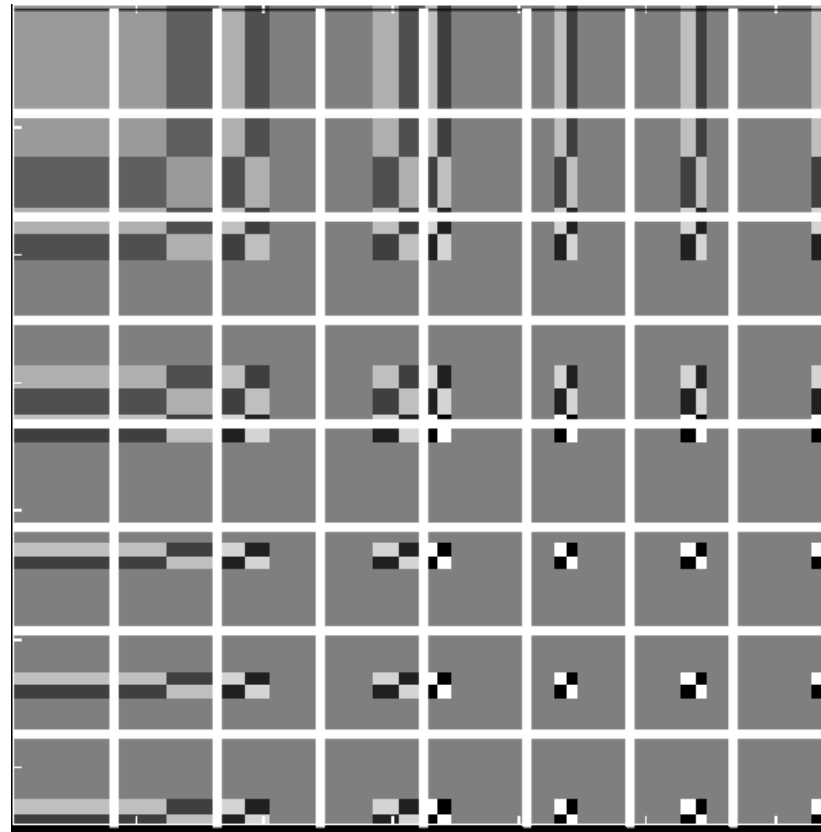


Haarova transf. – Zaključak

- Uočimo da se u donjim granama Haarove transformacije ne dešavaju suštinske stvari.
- Za vježbu kreirajte inverzni Haarov transformator.
- Haarova transformacija dobro prati generalnu logiku slike. Naime, kod slike se interesantne stvari dešavaju na niskim frekvencijama gdje se nalazi veći dio energije a Haarovi koeficijenti na niskim frekvencijama su da kažemo interesantniji odnosno detaljnije obrađeni od koeficijenata na visokim frekvencijama.

Haarova transf. – Baze slike

niske frekvencije
na kojima se nalazi
energija slike



Baze slike
za $N=8$.

visoke frekvencije
sa detaljima slike



“Optimalna” transformacija

- Haarovu transformaciju ćemo iskoristiti da bi uveli izuzetno važnu grupu transformacija koje se nazivaju **waveleti** koji donekle odstupaju od ideje do sada uvedenih transformacija ali dobro korespondiraju sa strukturom digitalne slike ali i nekih drugih važnih tipova signala kod kojih se energija “krije” na niskim frekvencijama dok se detalji nalaze na visokim.
- Prije nego pređemo na wavelete postavimo sebi pitanje što bi za nas bila optimalna transformacija signala.
- Na osnovu do sada uvedenih pojmova jasno je da je to transformacija koja bi u najmanjem broju transformacionih koeficijenata sadržala najveću moguću energiju signala.



“Optimalna” transformacija

- Pretpostavimo da je transformacija koju tražimo data sa transformacionom matricom **A**.
- Transformacija se može zapisati kao:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

- Uvedimo važan matematički koncept **sopstvenih vrijednosti** i **sopstvenih vektora** matrice **A**.
- Sopstvene vrijednosti λ_i su rješenja jednačine:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

jedinična matrica
dimenzija kao i
matrica **A**

- Neka su rješenja ove jednačina: λ_i , $i=1, \dots, N$.
- Sopstvene vrijednosti se u engleskoj literaturi nazivaju **eigenvalues**.



Sopstvene vrijednosti

- Za dato λ_i treba odrediti vektor \mathbf{v}_i za koji važi:
$$\mathbf{A}\mathbf{q}_i = \lambda_i \mathbf{q}_i$$
- Nije teško pokazati da pod datim uslovima (odnosno da je λ_i rješenje prethodno definisane jednačine) postoji beskonačno mnogo vektora koji zadovoljavaju ovu relaciju.
- Limitirajmo broj rješenja na **1** tako što ćemo normalizovati vektor \mathbf{q}_i tako da važi da je njegova amplituda (korjen sume kvadrata elemenata vektora) jednaka **1**, $||\mathbf{q}_i|| = 1$.



Matrica sopstvenih vektora

- Ako sopstvene vektore smjestimo u matricu red po red dobijamo matricu sopstvenih vektora.
- Ova matrica koju ćemo označiti sa **Q** posjeduje niz interesantnih osobina od kojih je jedna da je ovo ortogonalna matrica odnosno:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$$

- Ako sistem jednačina $\mathbf{A}\mathbf{q}_i = \lambda_i \mathbf{q}_i$ zapišemo u matričnoj formi dobijamo:

$$\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}$$

gdje je $\mathbf{\Lambda}$ dijagonalna matrica na čijoj su dijagonali sopstvene vrijednosti.



Matrica sopstvenih vrijednosti

- Konačno važi:

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$$

$$\mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T = \mathbf{A}$$

- Odredimo sada kroskorelaciju transformacije \mathbf{X} koja je jednaka:

$$\mathbf{C}_{xx} = \mathbf{E}\{\mathbf{X}\mathbf{X}^T\} = \mathbf{E}\{\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\} = \mathbf{A}\mathbf{E}\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}\mathbf{A}^T$$

Nije se zgoreg podsjetiti
osnovnih matričnih operacija.

- $\mathbf{C}_{xx} = \mathbf{A} \mathbf{c}_{xx} \mathbf{A}^T$

kros-korelaciona matrica
samog signala

- Energija koncentrisana u transformaciji se može povezati sa “energijom” matrice \mathbf{C}_{xx} a ta energija ima najmanje rasipanje ako je \mathbf{C}_{xx} dijagonalna matrica.



Idealna transformacija

- Lako je zaključiti da ćemo dobiti idealnu matricu \mathbf{C}_{xx} ako je \mathbf{A} matrica sopstvenih vektora matrice \mathbf{C}_{xx} .
- Ako nam je poznata \mathbf{C}_{xx} mi možemo odrediti idealnu transformaciju \mathbf{A} kao matricu sopstvenih vektora.
- Može da se pokaže da ako od vektora transformacionih koeficijenata \mathbf{X} usvojimo samo \mathbf{M} najvećih koeficijenata srednja kvadratna greška koju pravimo je jednaka:

$$MSE = \sum_{i=M+1}^N \lambda_i$$

sopstvene vrijednosti koje odgovaraju izostavljenim koeficijentima, odnosno N-M najmanjih sopstvenih brojeva



Idealna transformacija

- Može da se pokaže da se ne može dobiti transformacija koja ima manje MSE za M transformacionih koeficijenata od ove.
- Predmetna transformacija se naziva Karhunen-Loeve (KL) i predstavlja ideal koji se teži postići za transformacije koje se upotrebljavaju u kompresiji i filtriranju signala.
- Pa zbog čega se **KL** ne koristi?
- Odgovor je veoma jednostavan. Potrebno je da se sračuna autokorelaciona matrica signala a zatim i matrica sopstvenih vektora što je vremenski zahtjevno a često praktično i neupotrebljivo.



Sopstvene vrijednosti kod slike

- Predmetna transformacija bi bila izuzetno atraktivna da se može provesti kod slike jer većina slika ima takvu strukturu da sopstvene vrijednosti opadaju eksponencijalno a to znači da mali broj koeficijenata ima relativno veliku energiju a da veliki broj ostalih ima zanemarljivu energiju.
- Na sreću pokazano je na osnovu eksperimenata da se kod brojnih tipova slika KL transformacija može aproksimirati sa DCT!!!!
- Ovo je razlog zbog kojeg je jedan od najupotrebljavanijih standarda u kompresiji slike zasnovan na DCT.



Eigenvalues - *Primjeri*

- Kao malu reminiscenciju daćemo metodologiju kako se “pješke” ali i u MATLAB-u mogu sračunati sopstvene vrijedosti.
- Neka je data matrica:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Zapis u MATLAB-u

`R=[1 2 -1;3 1 0;1 0 -1]`

$$\det(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 6\lambda + 6$$

Zapis u MATLAB-u

`kar_jed=poly(R)`



Eigenvalues - *Primjeri*

- Ne postoji direktan postupak za rješavanje polinomijalne jednačine višeg reda osim naravno numeričkim sredstvima.
- Stoga je pogodno koristiti MATLAB-ovu naredbu **eig(R)** koja daje sopstvene vrijednosti matrice.
- U našem slučaju sopstvene vrijednosti su:
 $\lambda_1 \approx 3.337$ $\lambda_{2,3} \approx -1.168 \pm j0.658$.
- Odredimo sada “pješke” jedan sopstveni vektor.
- Neka to bude sopstveni vektor za sopstveni broj λ_1 .



Eigenvalues - *Primjeri*

- Za traženi sopstveni vektor važi:

$$\begin{bmatrix} -2.337 & 2 & -1 \\ 3 & -2.337 & 0 \\ 1 & 0 & -4.337 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$q_{31} = q_{11}/4.337 = 0.231q_{11} \quad q_{21} = 3/2.337q_{11} = 1.284q_{11}$$

Lako je provjeriti da ovi izrazi (uključujući malu grešku koja je posljedica zaokruživanja) zadovoljavaju prvu jednačinu koja nije nezavisna od preostale dvije.

$$-2.337q_{11} + 2q_{21} - q_{31} = 0$$



Eigenvalues - *Primjeri*

- Traženi vektor je $[q_{11}, 1.284q_{11}, 0.231q_{11}]$.
- Ovaj vektor se zatim normalizuje da ima moduo 1:

$$q_{11}^2 + (1.284q_{11})^2 + (0.231q_{11})^2 = 2.702q_{11}^2 = 1$$

$$q_{11} = 0.608$$

- Pa je sopstveni vektor $[0.608, 0.781, 0.140]$.
- MATLAB ne bi bio MATLAB kad ovo ne bi mogao da odradi jednostavno:

$[Q, L] = \text{eig}([1 \ 2 \ -1; 3 \ 1 \ 0; 1 \ 0 \ -1])$

**matrica sopstvenih
vektora**

**dijagonalna matrica
sopstvenih vrijednosti**

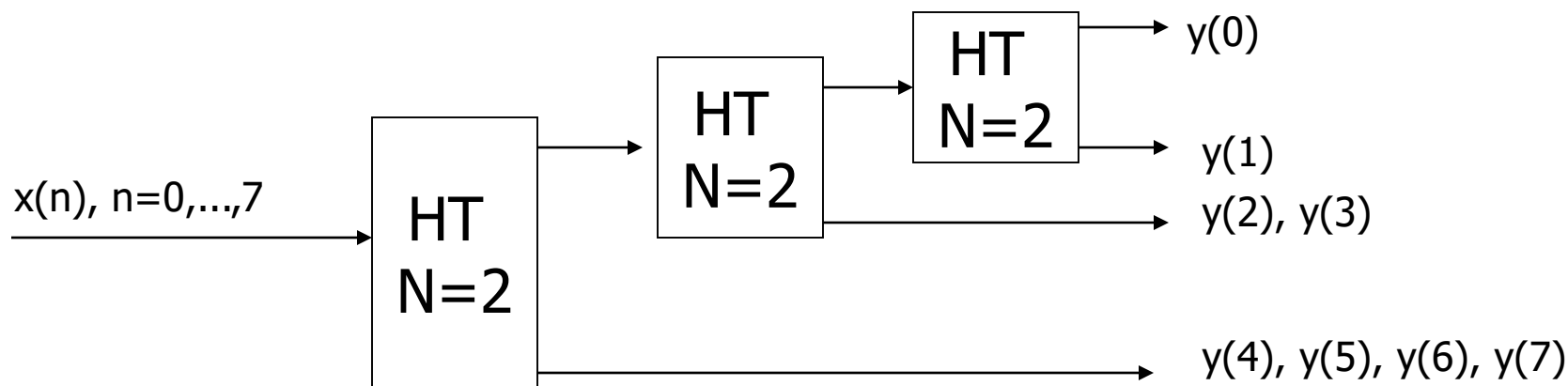


Eigenvalues - *Primjeri*

- Kod slike KL transformacija se može sračunati kao:
clear
Im=imread('cameraman.tif');
A=double(Im(180,:));
A=A(113:142);
A=A-mean(A);
[KL,L]=eig(A'*A)
- U mnogim slučajevima samo jedna sopstvena vrijednost nosi najveći dio snage i od čitave KL matrice dovoljno je pamtititi samo po nekoliko vrijednosti. Naravno po cijenu računanja transformacije i pamćenja konkretnih sopstvenih vektora te transformacije.

Wavelet transformacija

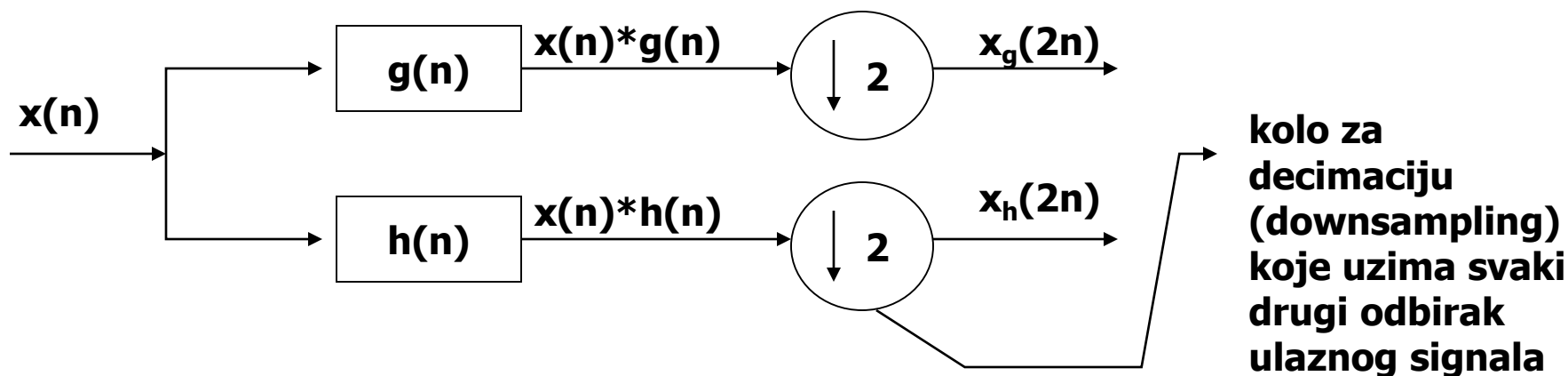
- Za trenutak se vratimo na slučaj Haarove transformacije koja se može realizovati za $N=8$ kao:



Uočili smo da se u donjoj grani ne dešava ništa Bog zna važno. Stoga se došlo na ideju da se donja grana i ne procesira odnosno da se transformacija računa uprošćeno zanemarujući ogroman broj nultih koeficijenata u Haarovoj transformacionoj matrici.

Wavelet sa Haarovim waveletom

- Prvi stepen u ovom razvoju se sada može zapisati ilustrovati na sledeći način.



**$g(n)$ ima impulsni odziv $g(0) = \sqrt{2}/2$ $g(1) = \sqrt{2}/2$
i nula za ostalo n**

**$h(n)$ ima impulsni odziv
i nula za ostalo n**

$$h(0) = \sqrt{2}/2$$

$$h(1) = -\sqrt{2}/2$$



Haarov wavelet

- U gornjoj grani se dobijaju odbirci:

$$x_0(n) = \frac{x(2n) + x(2n+1)}{\sqrt{2}} \quad n=[0, N/2-1)$$

- Dok se u donjoj grani dobijaju odbirci

$$x_1(n) = \frac{x(2n) - x(2n+1)}{\sqrt{2}} \quad n=[0, N/2-1)$$

Postavlja se pitanje kako se na osnovu ovih signala može rekonstruisati originalni signal?



Rekonstrukcija signala iz Haarovog waveleta

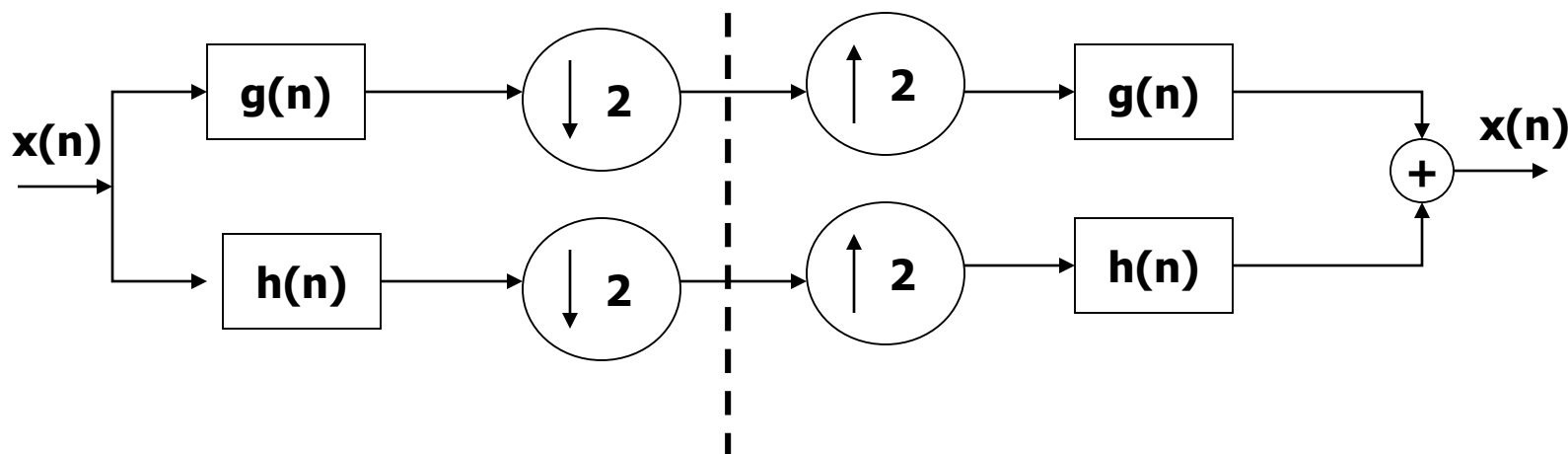
- Neka prvi korak u proceduri bude preodabiranje koje se definiše kao:

$$\tilde{x}_i(2n) = x_i(n) \quad \tilde{x}_i(2n+1) = 0 \quad i = 0, 1$$

- U narednom koraku oba signala mogu da prođu kroz iste filtre $g(n)$ i $h(n)$ na koje su prošli prilikom dekompozicije i na kraju signale iz dvije grane treba sabrati.
- Nakon izlaska iz $g(n)$ filtra signal u gornjoj grani predstavlja parove: $[(x(0)+x(1))/2, (x(0)+x(1))/2], [(x(2)+x(3))/2, (x(2)+x(3))/2] \dots$
- Dok je u donjoj grani: $[(x(0)-x(1))/2, (-x(0)+x(1))/2], [(x(2)-x(3))/2, (-x(2)+x(3))/2] \dots$

Haar Wavelet finalna šema

- Na kraju se signal može rekonstruisati tako što se saberu signali koji dolaze iz dvije grane.



Tačka koja razdvaja analizu i sintezu signala.

Postavlja se pitanje zbog čega bi provodili ovakvu analizu?

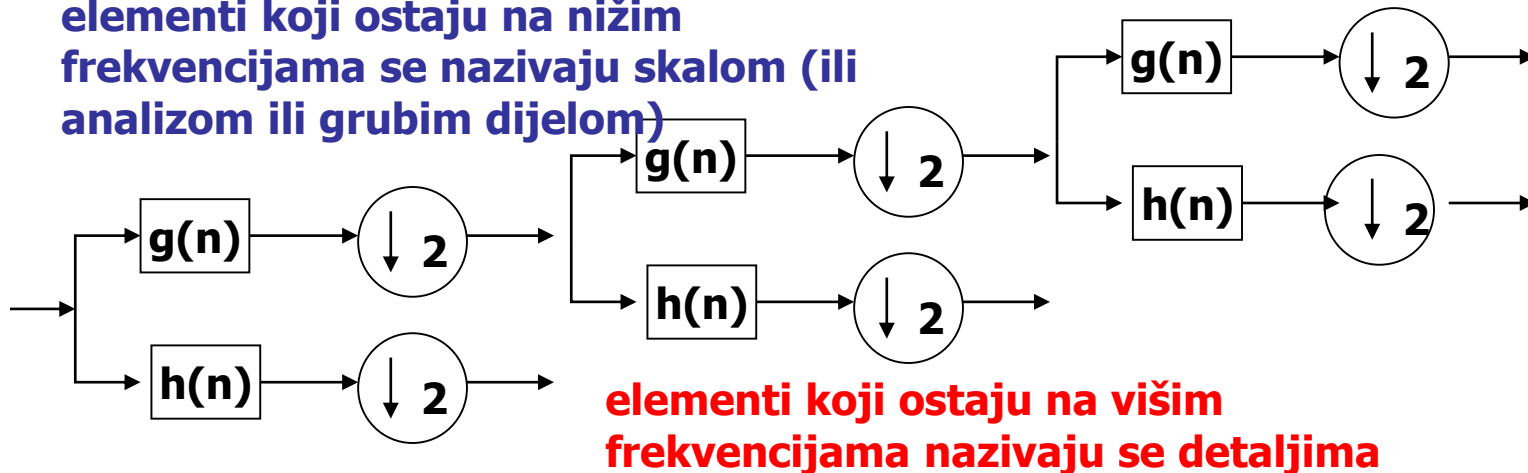


Razlozi za wavelet transformaciju

- U gornjoj grani wavelet transformacije vršimo filtriranje sa filtrom koji je niskopropusan (usrednjavanje koeficijenata je zapravo niskopropusno filtriranje).
- U donjoj grani vršimo visokopropusno filtriranje.
- Ovo dobro odgovara stanju koje postoji kod digitalne slike da se niskopropusni i visokopropusni djelovi bitno razlikuju po karakteristikama (po energiji) i da su pogodni za različite tipove obrada.
- Kako niskopropusni dio nosi ogromnu energiju to se često niskopropusni dio mora dalje dijeliti.

Analiza wavelet transformacijom

elementi koji ostaju na nižim frekvencijama se nazivaju skalom (ili analizom ili grubim dijelom)



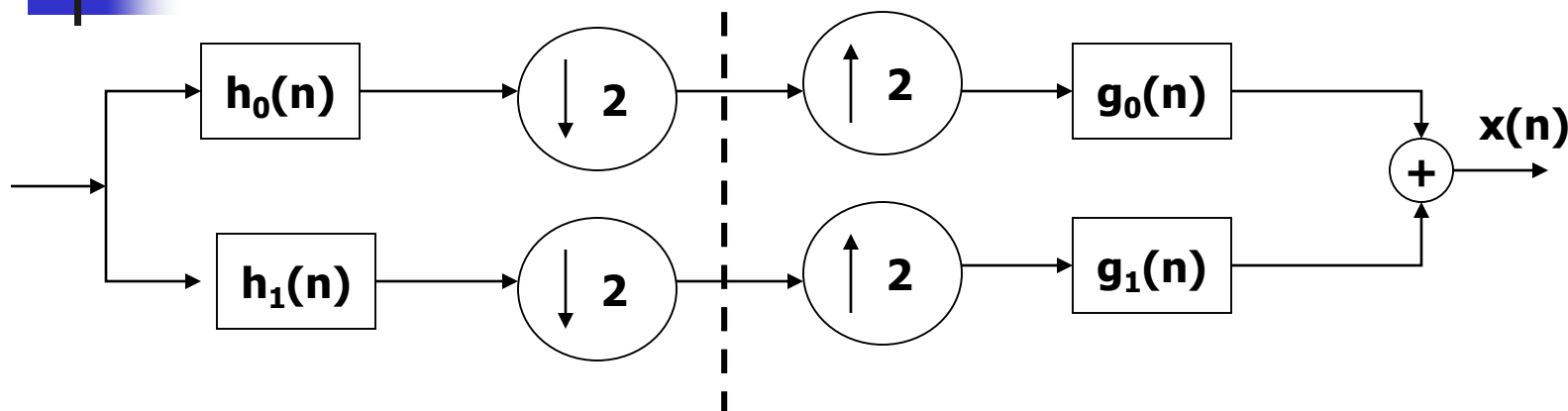
- Za vježbu kreirajte sistem koji sintetiše ulazni signal na osnovu signala dekomponovanog na ovaj način.
- U praksi se nakon dekompozicije signala wavelet transformacijom vrši filtriranje koeficijenata zahvaćenih šumom ili kompresija signala brisanjem koeficijenata koji nijesu od veće važnosti pa se zatim vrši rekonstrukcija.
- Naravno tada se izlazni signal razlikuje od ulaznog.



Opšta wavelet transformacija

- Prethodno opisani wavelet je ujedno i prvi koji je uveden.
- Ovaj wavelet (Haarov) je dobro prilagođen signalima koji se mogu modelovati kao odskočne funkcije u određenom intervalu.
- Ako su prelazi blaži onda ova transformacija nije i najbolja moguća.
- Postavlja se pitanje da li je moguće konstruisati wavelet transformaciju sa nekim drugim filtarskim funkcijama i ako jeste koje uslove moraju da zadovolje filtarske funkcije.
- Model te opšte wavelet transformacije će biti razmatran na ovom i narednom času.

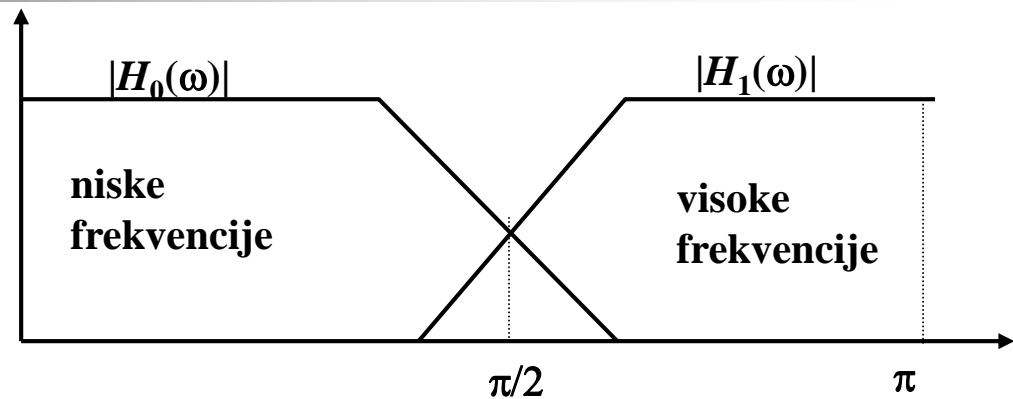
Model wavelet transformatora



- Nas interesuje što treba da zadovoljavaju filtri $h_0(n)$, $h_1(n)$, $g_0(n)$ i $g_1(n)$ da bi ulazni signal mogao biti dobijen na izlazu.
- Ono što je odmah očigledno je da filtri $h_0(n)$ i $h_1(n)$ treba da imaju međusobno komplementarne informacije o spektralnom sadržaju signala.

Filtri u spektralnom domenu

- Najjednostavniji način da se analiziraju filtarske banke je preko Z-transformacije.



$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Z-transformacija kola za decimaciju je:

dok je za kolo za preodabiranje jednaka:

Dokazati!

$$x_d(n) = x(2n) \quad X_d(z) = \frac{1}{2} [X(z^{1/2}) + X(-z^{1/2})]$$

$$x_u(n) = \begin{cases} x(n/2) & n = 0, 2, 4, \dots \\ 0 & \text{drugdje} \end{cases} \quad X_u(z) = X(z^2)$$

Dizajn wavelet filtara

- Na izlazu iz wavelet sistema (nakon relativno jednostavnih matematičkih čarolija) dobija se:

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{2}[G_0(z)H_0(z) + H_1(z)G_1(z)]X(z) + \frac{1}{2}[G_0(z)H_0(-z) + H_1(-z)G_1(z)]X(-z)$$

mora biti jednako 1

mora biti jednako 0

Pretpostavljajući da je dato $h_0(n)$ i $h_1(n)$ dobijamo jednačinu za određivanje $g_0(n)$ i $g_1(n)$ u Z domenu kao:

$$\begin{bmatrix} G_0(z) \\ G_1(z) \end{bmatrix} = \frac{2}{\det(\mathbf{H}_m(z))} \begin{bmatrix} H_1(-z) \\ -H_0(-z) \end{bmatrix}$$



Dizajn wavelet filtera

- Uveli smo oznaku:

$$\mathbf{H}_m(z) = \begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix}$$

Pretpostavljajući da je $\det(\mathbf{H}_m(z)) = \alpha z^{-(2k+1)}$ (čisto kašnjenje) i za $\alpha=2$ dobijamo:

$$g_0(n) = (-1)^n h_1(n)$$

$$g_1(n) = (-1)^{n+1} h_0(n)$$

Dok za $\alpha=-2$ dobijamo:

$$g_0(n) = (-1)^{n+1} h_1(n)$$

$$g_1(n) = (-1)^n h_0(n)$$



Dizajn wavelet filtara

- Pod uvedenom pretpostavkom važi:

$$P(z) = G_0(z)H_0(z) = G_1(-z)H_1(-z)$$

Dalje slijedi: $G_0(z)H_0(z) + G_0(-z)H_0(-z) = 2$

Određujući inverznu Z-transformaciju dobijamo:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_0(k)h_0(n-k) + (-1)^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_0(k)h_0(n-k) = 2\delta(n)$$

Prethodna relacija predstavlja uslov koji moraju da zadovolje filtri u frekventnom domenu.

Na narednom času zaključićemo dizajn wavelet filtara, komentarisati wavelet za 2D signale i prikazati standardne upotrebe waveleta.



Za samostalan rad

- Napisati program koji realizuje Hadamardovu i Walshovu transformaciju.
- Odrediti inverznu transformaciju Walshovoj i Hadamardovoj transformaciji. U koju grupu transformacija spadaju ove dvije transformacije? Istu proceduru ponoviti za Haarovu transformaciju.
- Pretpostaviti da imate signal dimenzija 8×8 kod kojega su koeficijenti $x(1,2)=2$, $x(3,1)=1$ i $x(5,6)=1$. Odrediti Hadamardovu, Haarovu i Walshovu transformaciju ovog signala.
- Za $N \times M = 8 \times 8$ slike odrediti bazične slike za $(p,q)=(1,2)$, $(p,q)=(3,3)$ i $(p,q)=(6,7)$.
- **Projekat za samostalni rad.** Primjena Hadamardove transformacije u kodiranju specijalne klase Hammingovih kodova – Reed-Mullerovih kodova.
- Napisati program koji određuje Hadamardovu i ostale pravougaone transformacije slike. Ako slika nije dimenzija koje su stepeni dvojke signal u realizaciji dopunjavati nulama do dimenzija koje su stepeni dvojke.



Za samostalni rad

- Skicirati hardversku realizaciju inverznog Haarovog transformatora.
- Za filtre koji se koriste kod Haarove transformacije (ili Haar waveleta) odrediti spektralni odziv. Kako ovi filtri imaju samo dva nenulta koeficijenta po potrebi izvršiti zero-padding da bi se dobila jasnija spektralna slika signala.
- Detalje eigenvalues dekompozicije i KL transformacije primjenjene na obradu signala proučite iz knjige:
 - M. R. Stojić, M. S. Stanković, R. S. Stanković: "Diskretne transformacije u primjeni," Nauka, 1993 (strana 119).
- **Za miniprojekt.** Proučiti **singular value dekompoziciju** i u kojim situacijama se ona može koristiti. Kao literaturu možda možete koristiti wikipediju.



Za samostalni rad

- Napisati program koji vrši wavelet Haarov razvoj signala date dužine (neka dužina bude stepen dvojke) zadati broj puta (recimo tri puta ali neka se ovo može mijenjati) tako da se svaki put vrši dekompozicija niskopropusnog dijela.
- Skicirati dekompoziciju putem wavelet transformacije. Wavelet niskopropusnog dijela se provodi 3 puta a u svakom koraku visokopropusni dio se dalje ne dekomponuje. Nakon toga skicirati sintezu odgovarajućeg waveleta.
- Pretpostaviti da je u niskopropusnoj grani wavelet dekompozicionog sistema idealni niskopropusni filter sa maksimalnom frekvencijom koja je jednaka polovini frekvencije koja slijedi na osnovu teoreme o odabiranju. Odrediti filter za visokofrekventnu granu i ako je moguće odgovarajuće sintetišuće filtre. Koja je osnovna razlika ovog wavelet sistema od sistema sa Haarovim waveletom?



Za samostalni rad

- Dokazati formule za Z-transformaciju kola za downsampling i upsampling.
- Signal $x(n)$ ulazi u sistem za downsampling pa zatim izlaz iz ovog sistema ulazi u kolo za upsampling. Što se dobija na izlazu (odrediti signal i njegovu Z transformaciju).
- Odredili ste Haarovu transformaciju. Pokušati da odredite način za računanje wavelet Haarovih koeficijenata iz Haarove transformacije.
- Haarova transformacija i wavelet sa Haarovom transformacijom su u suštini definisani sa istim ciljem. Neke razlike ipak postoje. Koje?
- Kakva je veza između transformacionih koeficijenata Hadamardove transformacije i Walshove transformacije?
- **Miniprojekat.** Posmatrajte nekoliko realnih slika i njihove transformacije (DFT, DCT, DHT i uvedene pravougaone). Za svaku od slika odrediti koliko koeficijenata je potrebno prenijeti da bi bilo sačuvano 50%, 70%, 80%, 90%, 95%, 98%, 99%, 99.5%, 99.9% snage signala. Koja je od uvedenih transformacija najbolja u svakom pojedinačnom slučaju.



Za samostalni rad

- Ponoviti prethodne eksperimente ako se slika razbije na blokove dimenzija $2^n \times 2^n$. Istražiti mogućnost odbacivanja transformacionih koeficijenata koji nose malu energiju u zavisnosti od n i od upotrijebljene transformacije. Da li možete izvesti neki konzistentan zaključak?
- Primjeniti tri stepena u wavelet Haarovom razvoju na različite slike i zatim analizirajte na sličan način dobijene koeficijente da bi odredili mogućnosti wavelet transformacije u kompresiji podataka.
- **Miniprojekat.** Detaljno se upoznajte sa waveletima počevši od njihove analogne forme. Kao početni materijal u ovom pravcu može vam poslužiti udžbenik.