



Digitalna obrada slike

Lekcija V

Radonova transformacija

DCT

Unitarne i ortogonalne transformacije

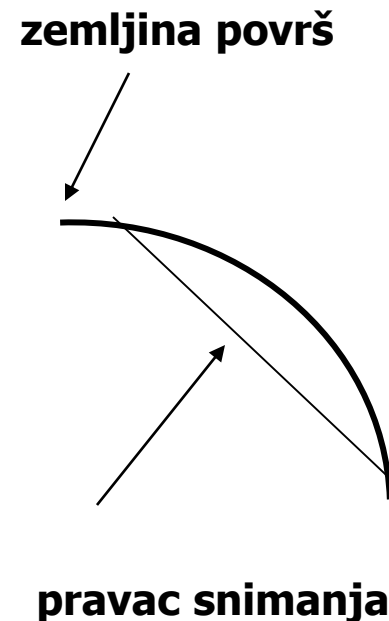


Radonova transformacija

- Radonova transformacija je razvijena još u XIX vijeku.
- Namjena ove transformacije je da na osnovu snimaka unutrašnjosti objekta napravljenih pod različitim uglovima iz različitih pravaca izvrši rekonstrukciju unutrašnjosti objekta.
- Čitava oblast zvana **kompjuterska tomografija** zasnovna je na ovoj transformaciji.
- Naravno kod ove transformacije koriste se signali koji mogu da prodru kroz objekte (X-zraci ili neki drugi tipovi signala) i zapravo se snima slabljenje tih signala kroz objekat.
- Prva upotreba je bila snimanje unutrašnjosti Sunca (ovdje je Sunce ujedno bilo izvor talasa).

Radonova transformacija

- Medicina je glavni konzument Radonove transformacije međutim postoje i druge oblasti koje je koriste uključujući i astronomiju.
- U novije vrijeme Radonovu transformacija se intenzivno koristi u geologiji.
- Koristivši zemljinu zakrivljenost snima se dio njene unutrašnjosti u potrazi za naftom, gasom i drugim prirodnim bogatstvima.
- Snimanje se obično obavlja pomoću zvučnih talasa.





Radonova transformacija

- Pretpostavimo da raspolažemo sa signalom (zrakom) koji može da prodre u unutrašnjost objekta.
- Taj signal slabi lokalno u tački objekta (x,y) i neka je funkcija slabljenja $f(x,y)$.
- Funkcija slabljenja nam govori nešto o materijalu kroz koji naš zrak prolazi (ultrazvuk prolazi kroz tkiva sa tečnošću, X-zraci slabe na kostima više itd).
- Dakle, cilj nam je odrediti i vizuelizovati funkciju slabljenja $f(x,y)$ za sve tačke na objektu.
- Mi, međutim, znamo jačinu zraka kojeg smo poslali kao i koliko je on oslabio duž nekog pravca (kumulativno slabljenje duž pravca). Na osnovu toga treba da rekonstruišemo $f(x,y)$.



Radonova transformacija

- Uvedimo funkciju slabljenja duž nekog pravca **s** u objektu. A i B su ulazna i izlazna tačka zraka u objekat.

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) ds$$

- Pod relativno realnom pretpostavkom u mnogim sistemima da zrak ide pravolinijski prava **s** se može zapisati u parameterskom obliku kao:

$$x \cos \theta + y \sin \theta = t$$

θ je ugao u usvojenom koordinatnom sistemu a **t** je neki parametar. Zapamite da se svaka prava može zapisati na ovaj način.



Funkcija slabljenja na pravcu

- Funkcija slabljenja na pravcu determinisanom uglom θ i parametrom t se može zapisati kao:

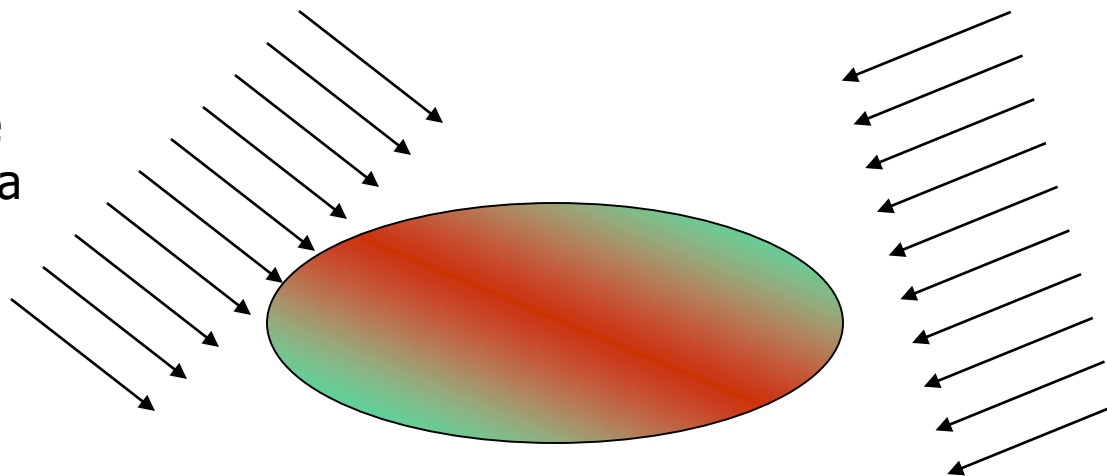
$$P_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy$$

Ova relacija važi zato što parovi tačaka (x, y) duž pravca s zadovoljavaju relaciju sa prethodnog slajda.

Sada se problem formalno matematički svodi na određivanje $f(x, y)$ na osnovu $P_{\theta}(t)$ gdje se θ i t mijenjaju u određenim granicama a ovo znači da na jedno tijelo šaljemo više zraka pod različitim uglovima i za različito t .

Veza preko FT

zraci kroji kroz
objekat prolaze
pod uglom θ_1 za
različito t



zraci kroji kroz
objekat prolaze
pod uglom θ_2 za
različito t

- Naš je cilj da na osnovu poznatog $P_\theta(t)$ za različite uglove θ i za razno t odredimo $f(x,y)$.
- Za početak posmatrajmo 2D FT signala $f(x,y)$:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j(ux+vy)} dx dy$$



Veza $P_\theta(t)$ i $f(x,y)$ preko FT

- FT signala $P_\theta(t)$ je:

$$S_\theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P_\theta(t) e^{-j\omega t} dt$$

Uvrstimo:

$$P_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy$$

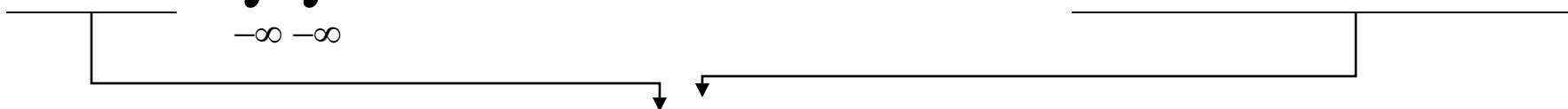
Dobijamo:

$$S_\theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) e^{-j\omega t} dx dy dt =$$



Veza $P_\theta(t)$ i $f(x,y)$ preko FT

- Integraljenjem preko t dobijamo:

$$S_\theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy = F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)$$


Ura! postoji veza između FT projekcije objekta i FT unutrašnjosti objekta.

Sada problem možemo smatrati riješenim.

1. Odredimo projekcije.
2. Zatim odredimo njihovu FT.
3. Na osnovu nje odredimo 2D FT unutrašnjosti objekta.
4. Na kraju odredimo inverznu 2D FT i dobijamo unutrašnjost objekta.

Problemi kod Radonove transformacije



- Pod Radonovom transformacijom se najčešće podrazumjeva određivanje funkcije $P_\theta(t)$ koja se često vizuelizuje kao 2D funkcija od t i θ .
- Mnogo problema je ipak preostalo kod realizacije Radonove transformacije.
- Prvi od njih je činjenica što mi dobijamo odbirke FT parametrizovane kao $(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)$ odnosno dobijamo rezultat u polarnim koordinatama.
- Očigledno u nekoj od faza primjene Radonove transformacije moramo izvršiti interpolaciju sa pravougaonog na polarni raster.



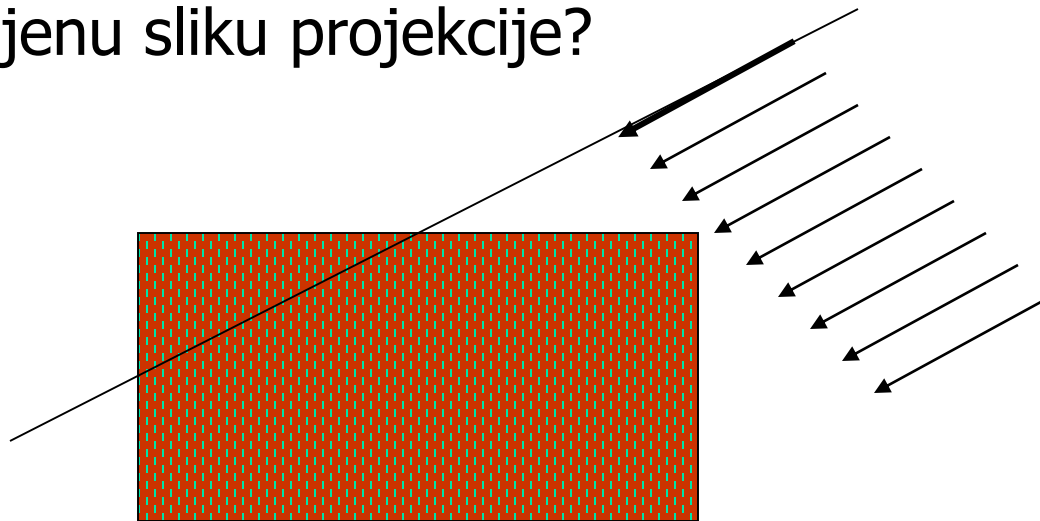
Problemi kod Rad. Trans.

- Drugi čest problem leži u načinu snimanja.
- Naime, aparatura koja snima objekat se okreće pa nemamo direktnu vezu gdje je θ ugao već uređaji koji vrše snimanje daju rezultat u funkciju vremena pa se na osnovu ugaone brzine aparature treba donijeti odluka o samom uglu.
- Ponekad mi već imamo sliku ali želimo odrediti projekcije odnosno Radonovu transformaciju.
- Naime, projekcije često nose veoma korisne informacije o strukturi slike koje se mogu upotrijebiti u prepoznavanju pojedinih važnih karakteristika slike (npr. pravih linija ili sinusoidalnih obrazaca).

Radon. transf. i projekcije

- Postavlja se pitanje što su u slučaju da već imamo snimljenu sliku projekcije?

Projekcija slike duž datog pravca za dati ugao je zapravo suma osvjetljaja u pikselima slike na koje se naiđe duž pravca.



Kako je slika diskretna to može da znači da duž nekog pravca "zrak" prolazi između piksela i ne sumira pravilno piksele.



Radon. transf. i projekcije

- Problem diskretne strukture slike i njenih projekcija se može riješiti na sledeći način.
 - Za dati ugao θ izvršiti rotiranje slike za ugao $-\theta$.
 - Prilikom rotiranja vrše se dogovorene interpolacije.
 - Izvršiti sumiranje piksela duž horizontale. Ne može se dogoditi situacija promašivanja piksela.
 - Na taj način smo odredili $P_{\theta}(t)$.
 - Istovremeno možemo sumirati rotiranu sliku po vertikali. Na ovaj način smo sračunali $P_{\pi/2-\theta}(t)$.
- Procedura se ponavlja za svaki ugao.
- Napominjemo da ovo jeste najjednostavniji način da se shvati kako se obavlja računanje Radonove transformacije kod diskretne slike ali nije i najefikasniji pa se stoga rijetko koristi u praksi.



Radonova transf. - Primjer

- Neka je na crnoj pozadini nacrtana prava bijela linija **$y=ax+b$** . Kolika je Radonova transformacija?

$$P_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy$$

Naša "slika" se može zapisati kao:

$$f(x, y) = \delta(y - ax - b)$$

pa je projekcija:

$$P_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y - ax - b) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy$$



Radonova transf. - Primjer

- Integraleći po y dobijamo:

$$P_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x \cos \theta + (ax + b) \sin \theta - t) dx = \frac{\delta(t - b \sin \theta)}{\cos \theta + a \sin \theta}$$

Pogledajmo sada dobijeni izraz. Na prvi pogled ništa neobično ali se lako može uočiti da za **$\cos \theta + a \sin \theta = 0$** ovaj izraz postaje beskonačan!!! Odnosno u Radonovoj transformaciji se pojavljuje veoma velika vrijednost za ugao: **$\theta = -\arctg(a)$** (**a** je zapravo tangens ugla koji prava zaklapa sa x-osom). Za taj ugao podintegralna veličina se može izvući van integrala pa možemo odrediti i drugi parametar prave linije na osnovu **$t = b \sin \theta$** .



Rad. trans. u MATLAB-u

```
clear
N=100;
Z=zeros(N,N);
Z(75,25:75)=1;
Z(25,25:75)=1;
Z(25:75,25)=1;
Z(25:75,75)=1;
[R,t]=radon(Z,0:89);
pcolor(0:89,t,R),shading interp
I=iradon(R,0:89);
%%%Ova funkcija moze imati i dodatne parametre
```

Veoma jednostavan primjer!

Slika je kvadrat dimenzija 50×50 (provjerite sa `imshow(Z)`). Drugi argument naredbe **radon** su uglovi za koje se računa transformacija.

Na slici koja se nacrtala naredbom `pcolor` jasno se izdvajaju četiri maksimuma koji odgovaraju stranicama kvadrata.

Inverzna transformacija ne radi posao idealno (ne rekonstruiše sliku idealno). Zbog čega?



iradon

- Kao što smo vidjeli inverzna Radonova transformacija je mnogo problematičnija pa stoga funkcija `iradon` u MATLAB-u posjeduje više parametara. Dakle, prva dva parametra su sama Radonova transformacija i skup uglova pod kojima je napravljena dok se često koriste još dva argumenta. Treći argument se odnosi na tip interpolacije dok se četvrti odnosi na tip filtra kojim se filtrira dobijeni rezultat u cilju smanjenja pojedinih efekata.

```
clear  
P = phantom(128);  
R = radon(P,0:179);  
I = iradon(R,0:179,'nearest','Hann');  
imview(P), imview(I);
```

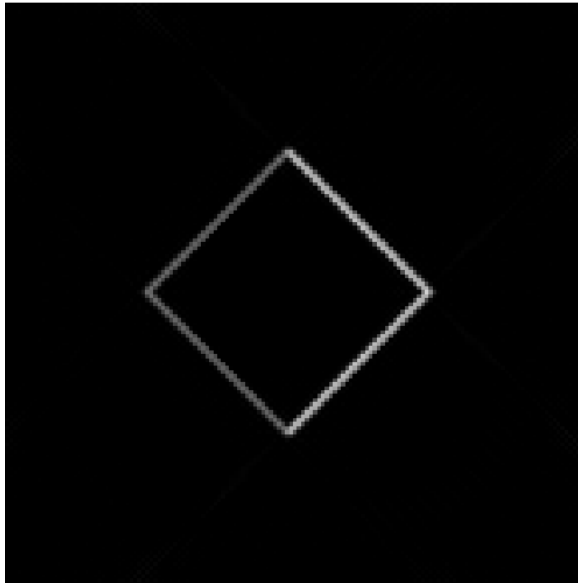
```
figure, imshow(I(2:129,2:129)-P)  
I1 = iradon(R,0:179,'linear','Shepp-Logan');  
figure, imshow(I1(2:129,2:129)-P)  
sum(sum((I(2:129, 2:129)-P).^2))  
sum(sum((I1(2:129, 2:129)-P).^2))
```



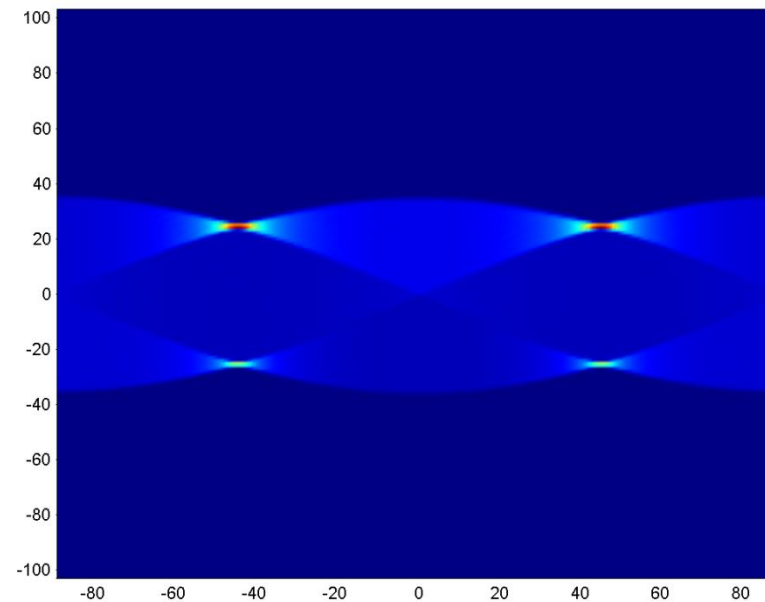
DFT - Zaključci

- Fourierova transformacija, sa njenim varijantama, DFT, FT diskretnog signala bi trebala da bude dosta jasan koncept za jednog inženjera elektrotehnike.
- Kod FT signal je razbijen u red po sinusoidalnim funkcijama. Koeficijenti koji odgovaraju niskim učestanostima odgovaraju sinusoidama sa većom periodom dok koeficijenti na većim učestanosti odgovaraju sinusoidama sa manjom periodom.
- Ako je slika "ravna" njena FT će biti koncentrisana oko koordinatnog početka a ako je slika veoma promjenljiva njena FT će imati komponente na višim učestanostima.

Radonova transformacija - primjer



Slika



Ugao $\pm\pi/4$

**Radonova
transformacija**



DFT - Zaključci

- DFT u obradi slike ima dva krupna problema:
 - **DFT za realnu sliku daje kompleksni signal.** U startu to znači duplo veće memorijske zahtjeve koji se mogu redukovati korišćenjem osobina DFT realnih signala. Kako? Naravno problem rada sa ovakvim podacima (kompleksnim i reorganizovanim) nije prevaziđen.
 - Postoji drugi znatno složeniji problem. Naime, ako je slika zahvaćena šumom mi ponekad želimo u cilju filtriranja da poništimo one odbirke koji su u frekventom domenu dominantno prouzrokovani šumom. Takvo odsjecanje zašumljenih odbiraka vodi ka pojavi **neprijatnih oscilatornih efekata** kod filtrirane slike (posledica tzv. **Gibsovog fenomena**). Ponekad ljepše izgleda zašumljena slika nego filtrirana. Ovo se prevazilazi zaobljavanjem a ne odsjecanjem (ponišćavanjem) DFT koeficijenata ali po cijenu drugih loših efekata. Ova mana DFT dovodi do njene problematične upotrebe u kompresiji i drugim aplikacijama.

Diskretna Kosinusna Transformacija (DCT)

- Najpoznatije sredstvo da se pomenute mane 2D DFT izbjegnu je 2D DCT. U praksi postoji mnoštvo definicija raznih varijanti DCT. Ovdje 1D DCT definišemo kao:

$$C(0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \quad C(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \frac{(2n+1)k\pi}{2N}$$

za $k=1, \dots, N-1$



Inverzna DCT

- Inverzna DCT se definiše kao:

$$x(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} C(0) + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^{N-1} C(k) \cos \frac{(2n+1)k\pi}{2N}$$

Za vježbu dokazati su DCT i inverzna DCT međusobno inverzne.



Brza DCT

- Kako se DCT puno koristi u digitalnoj obradi slike bilo bi uputno da se razviju brzi algoritmi za izračunavanje.
- U tom pravcu postoji više kvalitativno različitih pristupa:
 - Iskoristiti osobinu da je:

$$\cos \frac{(2n+1)k\pi}{2N} = \frac{\exp\left(j \frac{(2n+1)k\pi}{2N}\right) + \exp\left(-j \frac{(2n+1)k\pi}{2N}\right)}{2}$$

pa zatim na osnovu jednostavnih relacija svesti na DFT za koju znamo metodologije brzog izračunavanja.

Uraditi za domaći!!!



Brza DCT

- Druga tehnika za brzo računanje DCT je zasnovana na specifičnoj metodologiji za produženje signala. Metodologija je opisana u udžbeniku i pogledajte je. Brza DCT se na ovaj način opet svodi na brzu FFT.
- Konačno, postoji mogućnost da se DCT razbije na dvije DCT od po $N/2$ odbiraka. **Za domaći uradite i ovu proceduru.**
- U MATLAB-u 1D DCT se računa naredbom **dct** dok se inverzna 1D DCT računa naredbom **idct**.



2D DCT

- Opet ne postoji jedinstven način da se računa 2D DCT. Najjednostavnija tehnika je da se 1D DCT sračuna po redovima pa da se 1D DCT sračuna po kolonama rezultujuće matrice.
- Postoje naravno i tehnike za direktno računanje 2D DCT. Opet postoji više definicija 2D DCT koje se koriste u praksi a mi smo prihvatili:

$$C(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} 4x(n_1, n_2) \cos \frac{(2n_1 + 1)k_1\pi}{2N_1} \cos \frac{(2n_2 + 1)k_2\pi}{2N_2}$$



Inverzna 2D DCT

- Inverzna 2D DCT (za našu 2D DCT) je:

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \underbrace{w_1(k_1)} \underbrace{w_2(k_2)} C(k_1, k_2) \cos \frac{(2n_1 + 1)k_1 \pi}{2N_1} \cos \frac{(2n_2 + 1)k_2 \pi}{2N_2}$$

$\searrow \quad \swarrow$

$$w_i(k_i) = \begin{cases} 1/2 & k_i = 0 \\ 1 & 1 \leq k_i \leq N - 1 \end{cases}$$

Dokazati da su uvedene 2D DCT i inverzna 2D DCT međusobno inverzne ako jesu a ako nijesu izvršiti potrebnu modifikaciju jedne ili druge!!!

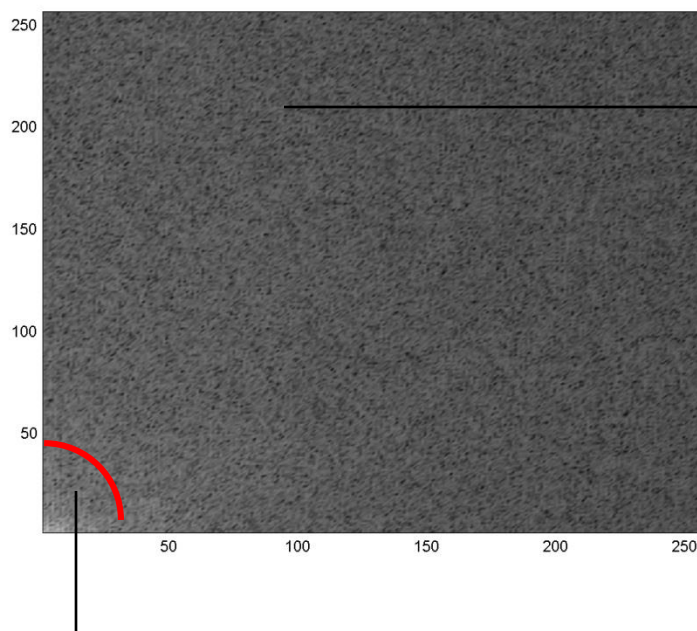


Brza 2D DCT

- Iste tri metodologije koje su uvedene za brzo računanje 1D DCT mogu se koristiti i za 2D DCT.
- Situacija se ovdje još komplikuje time što se možemo opredjeljivati između “korak po korak” rješenje i direktnog 2D računanja.
- “Korak po korak” se svede na 1D DCT pa stoga (uz pomoć udžbenika) odradite sve tri varijante brze 2D DCT računate direktno.
- **Dijelim vaše oduševljenje sa ovim zadatkom!**

2D DCT – MATLAB - Primjer

- Naredba za 2D DCT u MATLAB-u je **dct2** dok je inverzna **idct2**. Kod 2D DCT (ni kod 1D) nije potrebno vršiti preuređivanje koeficijenata.
- Na sledećem slajdu je prikazan logaritam DCT koeficijenata za sliku **Baboon**.



“visokofrekventni koeficijenti” sa izuzetno malim vrijednostima, ovi koeficijenti predstavljaju detalje slike

“niskofrekventni koeficijenti” sa izuzetno velikim vrijednostima koeficijenata, ovi koeficijenti predstavljaju osvjetljaj slike



Unitarne i ortogonalne transformacije

- Očigledno je da su DFT i DCT veoma slične transformacije.
- Pod ovim ne podrazumjevamo toliko njihove osobine nego strukturu.
- Naime i jedna i druga transformacija se mogu napisati (za 1D signale) kao:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)w(n, k)$$

Očigledno je da se ove transformacije mogu zapisati i u matričnoj formi.



Matrični zapis transformacija

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} w(0,0) & w(1,0) & \cdots & w(N-1,0) \\ w(0,1) & w(1,1) & \cdots & w(N-1,1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w(0,N-1) & w(1,N-1) & \cdots & w(N-1,N-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \cdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}$$

- Inverzne transformacije se mogu zapisati kao:

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X}$$



Unitarne i ortogonalne transf.

- Dvije posebno interesantne grupe transformacija su:
 - Unitarne kod kojih je matrica transformacije unitarna $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^H$ (\mathbf{W}^H je hermitska matrica transponovana i konjugovana $\mathbf{W}^H = (\mathbf{W}^T)^*$).
 - Ortogonalne kod kojih je matrica transformacije ortogonalna: $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^T$.
- Očigledno svaka ortogonalna transformacija za realno \mathbf{W} je ujedno i unitarna.
- Na prvi pogled DFT ne pripada nijednoj od pomenutih kategorija. Stoga se DFT ponekad definiše kao:

$$X(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

Multiplikativna konstanta koja transformaciju ne mijenja suštinski.



DFT kao unitarna transformacija

- Inverzna transformacija je tada:

$$x(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$$

Lako je pokazati da je DFT sada unitarna transformacija. Da ne bi komplikovali sebi život mi pod ortogonalnim i unitarnim transformacijama možemo podrazumijevati i one čije transformacione matrice pomnožene multiplikativnom konstantom zadovoljavaju odgovarajuće osobine.

Osnovni razlog zbog koga se u praksi koriste samo ove dvije grupe transformacija je činjenica da se njihova inverzna transformacija može računati bez proračuna inverzne matrice što je za velike matrice veoma zahtjevno.



Bazisni signali

- Sada možemo uvesti jedan poznati analitički koncept – **bazisne signale**.
- Posmatrajmo inverznu transformaciju:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) g(n, k)$$

Očigledno je da se ovo može zapisati u matričnoj formi i da između matrice **G** u kojoj su upisani članovi **g(n,k)** i matrice **W** postoji određena relacija.

Sada se vidi ono što studenti vođeni formalizmom transformacija često zaborave. Signal (svaki signal uz neka ograničenja npr. signal konačne energije) se može razviti u red preko nekih elementarnih funkcija **g(n,k)** sa težinskim koeficijentima koji su jednaki posmatranoj transformaciji.



Bazisni signali

- Kako su predmetne transformacije linearne to važi da sumi transformacija odgovara suma signala.
- Sada zapišimo transformaciju kao:

$$X(k) = \sum_{k_1=0}^{N-1} X_{k_1} \delta(k - k_1)$$

Ovo praktično znači da se transformacija može shvatiti kao suma N transformacija koje su jednake $X(k_1) = X_{k_1}$ za $k=k_1$ i 0 drugdje.

Nastavimo analizu kombinujući dvije posljednje uvedene relacije.



Bazisni signali

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{k_1=0}^{N-1} X_{k_1} \delta(k - k_1) g(n, k) = \\ &= \sum_{k_1=0}^{N-1} X_{k_1} \sum_{k=0}^{N-1} \delta(k - k_1) g(n, k) = \sum_{k_1=0}^{N-1} X_{k_1} g(n, k_1) \end{aligned}$$

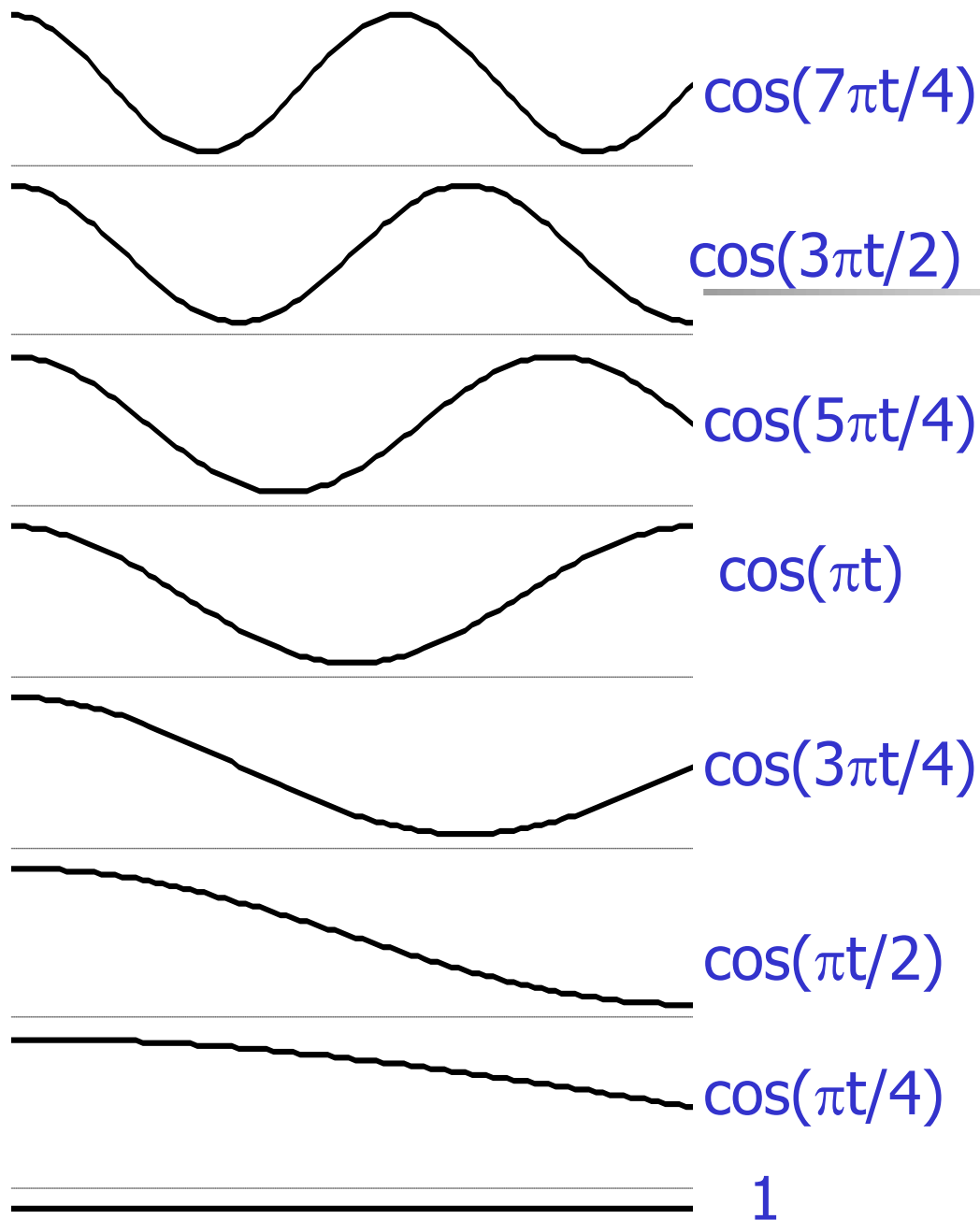
- Dakle, svaki signal se može predstaviti kao težinska suma redova matrice inverzne transformacije (koja je obično u jednostavnoj vezi sa matricom transformacije).
- Signali $g(n, k_1)$ se stoga nazivaju bazisnim i njihova analiza može da nam dosta ukaže o prirodi neke transformacije.



Bazisni signali – Primjer

- Posmatrajmo DFT gdje je $g(n,k)=\exp(j2\pi nk/N)$.
- Uzmimo da je $N=8$ i pokušajmo da vizuelizujemo samo realni dio transformacije. Da bi još više pojednostavili vizuelizaciju umjesto n koje je diskretna veličina za trenutak se vratimo na t koje je analogna veličina.
- Dobijeni bazisni signali su tada redom:

1	$\cos(\pi t/4)$	$\cos(\pi t/2)$	$\cos(3\pi t/4)$
$\cos(\pi t)$	$\cos(5\pi t/4)$	$\cos(3\pi t/2)$	$\cos(7\pi t/4)$



Bazisni signali nam govore dosta o prirodi transformacije. Naime težinska suma koeficijenata daje nam polazni signal. Što je "težina" nižih koeficijenata veća (za malo **k**) to je signal niskopropusniji odnosno ima veću energiju na nižim učestanostima a u suprotnom ako je veća snaga komponenti na većim učestanostima to je signal visokopropusniji odnosno ima više energije na višim frekvencijama.

Generalizovane transformacije kod 2D signala

- Prije nego pređemo na analizu nekih poznatih transformacija (osim DFT i DCT) izvršićemo generalizaciju transformacija za 2D signale.
- Neka je dat 2D signal $\mathbf{x(n,m)}$ dimenzija $\mathbf{N \times M}$.
- Generalizovana transformacija se može zapisati kao:

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x(n, m) J(n, m; k_1, k_2)$$

4D transformaciona matrica





Uobičajene forme transform. matrice

- Na sreću 4D transformaciona matrica nije često u upotrebi već se obično transformacije 2D signala obavljaju tako da se odvojeno vrši transformacija po **kolonama** (ili **vrstama**) pa se zatim obavi transformisanje **vrsta** (odnosno **kolona**) matrice koja je dobijena kao međurezultat.
- Ovo podsjeća na korak-po-korak algoritam za računanje DFT.
- Ovakav oblik transformacije se može zapisati kao:

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{M-1} x(n, m) H_c(m, k_2) \right] H_r(n, k_1)$$

Transfor. 2D signala

Matrična forma

- U matričnoj formi separabilna transformacija (gdje se 4D transformaciona matrica može prikazati kao proizvod dvije 2D transformacije) se može zapisati kao:

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}_c \mathbf{x} \mathbf{H}_r$$

- Inverzna transformacija se može zapisati kao (malo podsjećanje na elemente rada sa matricama nije na odmet):

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}_c^{-1} \mathbf{X} \mathbf{H}_r^{-1}$$

- Po nepisanim pravilima matrica transformacije po kolonama je ista kao i ona po vrstama $\mathbf{H}_c = \mathbf{H}_r = \mathbf{T}$ pa slijedi:

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} \mathbf{x} \mathbf{T}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{X} \mathbf{T}^{-1}$$

- Ako je \mathbf{T} unitarna odnosno ortogonalna matrica inverzna 2D transformacija se svodi na:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^H \mathbf{X} \mathbf{T}^H \quad \text{ili} \quad \mathbf{x} = \mathbf{T}^T \mathbf{X} \mathbf{T}^T$$



Bazisne slike

- Analogno bazisnim signalima se mogu uvesti i bazisne slike. Za sliku dimenzija $N \times M$ može se definisati $N \times M$ bazisnih slika koje su jednake inverznoj transformaciji signala $\delta(i-p, j-q)$. Svih $N \times M$ bazisnih slika se dobija kada se p i q izmjenjaju u domenu $(p, q) \in [0, N) \times [0, M)$.
- Ako je $\mathbf{P} = \mathbf{T}^{-1}$ i imamo posla sa separabilnom transformacionom matricom bazisna slika (p, q) je jednaka:

$$f_{(p,q)}(n,m) = P(n,p)P(m,q)$$

- Svaka slika se može formirati kao težinska suma bazisnih slika:

$$x(n, m) = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{M-1} X_{p,q} f_{(p,q)}(n, m)$$



Sinusoidalne transformacije

- Iako ne postoji prepreka da se signal razvije u red bilo kojeg tipa, inženjeri su najčešće prikazivali signale u obliku reda po sinusoidalnim (ili kosinusoidalnim funkcijama).
- To je veoma prirodan koncept. U elektrotehnici odgovara naizmjeničnoj struji koja nastaje u sinhronim generatorima prouzrokujući da je osnovni tip napajanja baš takva struja. Mnogi fenomeni u komunikacionim sistemima su takođe veoma jasno povezani sa sinusoidalnim funkcijama. U mehanici se ovakav tip funkcija i razvoja javlja prilikom analize oscilacija.
- Pored toga sinusoidalne funkcije daju elegantan analitički aparat bez kojeg analiza mnogih fenomena ne bi bila moguća.



Sinusoidalne transformacije

- Pored DFT koja ima koeficiente transformacione matrice:
 $w(n,k) = \exp(-j2\pi nk/N)$ možemo pomnožiti sa \sqrt{N}

uveli smo i DCT kod koje su koeficijenti transformacione matrice:

$$c(n,k) = \alpha(k) \cos \left[\frac{\pi(2n+1)k}{2N} \right] \rightarrow \alpha(k) = \begin{cases} \sqrt{1/N} & k = 0 \\ \sqrt{2/N} & k \neq 0 \end{cases}$$

Pored njih postoji i DST (diskretna sinusna transformacija) sa koeficijentima transformacione matrice:

$$s(n,k) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \left[\frac{\pi(n+1)(k+1)}{N+1} \right]$$



Hartleyeva transformacija

- Hartleyeva transformacija (DHT) se često koristi ali to nije razlog da joj pripadne čitav slajd već naprosto nije mogla stati na prethodnom.
- Definiše se kao:

$$h(n, k) = \text{cas}\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) = \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) + \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

Hartleyeva transformacija je slična Fourierovoj ali za realni signal daje realnu transformaciju što u nekim aplikacijama može biti od koristi.



Sinusoidalne transformacije

- Sa ovim smo zaključili najvažnije forme sinusoidalnih transformacija koje se koriste u praksi.
- Već na narednom času ćemo pokazati da ovo nijesu i jedine transformacije koje se koriste kod digitalne slike.
- Za vježbu odrediti relacije koje postoje između ovih transformacija kako u 1D slučaju tako i u 2D slučaju.
- Pored toga probajte da odredite bazisne slike ovih transformacija.



Za samostalan rad

- Pobrojaćemo predloge zadataka koje smo već naveli tokom ove lekcije.
- Primjeniti Radonovu transformaciju u MATLAB-u na nekoliko jednostavnih slika i izvršiti rekonstrukciju na osnovu **iradon** naredbe. Do kakvih zaključaka dolazite?
- Aparatura za snimanje koja treba da kreira Radonovu transformaciju okreće se uniformnom ugaonom brzinom ϕ oko objekta koji je predmet snimanja. Kakva treba da bude slika objekta da bi Radonova transformacija bila idealno koncentrisana u jednoj tački? Da li postoji složenija funkcija od prave linije za koju se može postići ovakav rezultat i ako postoji koja je to funkcionalna zavisnost?



Za samostalan rad

- Dokazati da su DCT i inverzna DCT međusobno inverzne. Pored toga odrediti inverzne transformacije za sve sinusoidalne transformacije koje su uvedene u tekstu.
- Realizovati brzu DCT preko specifičnog periodičnog produženja opisanog u knjizi; preko razbijanja kosinusa u dvije eksponencijalne funkcije i direktnom procedurom. Uporediti dobijena rješenja.
- Realizovati brzu 2D DCT na osnovu prethodna tri algoritma.
- Posmatrati 2D DFT i 2D DCT neke realne slike i zatim maskirati (filtrirati) dio koeficijenata i odrediti inverznu transformaciju pa uporediti sa polaznom slikom. Da li možete da dođete nekih zaključaka?



Za samostalan rad

- Odrediti međusobne veze četiri definisane sinusoidalne transformacije i razmotrite i po mogućnosti realizujte brze algoritme za njihovo računanje. Posebno je atraktivno (i teško) realizovati npr. DHT za N razbijanjem na dvije DHT sa po $N/2$ odbiraka.
- Za uvedene sinusoidalna transformacije odrediti inverzne transformacije.
- Za dato N odrediti bazisne signale i bazisne slike nekih od definisanih sinusoidalnih transformacija signala u programskom paketu MATLAB. Ko je nestrpljiv neka pogleda naredni slajd.



Bazisni signali i slike

- Prikazati bazisne signale za DHT sa $N=32$.

```
clear
N=32;
[n,k]=meshgrid(0:N-1,0:N-1);
H=cos(2*pi*n.*k/N)+sin(2*pi*n.*k/N);
G=inv(H);
for k=1:N
    plot(G(:,k))
    pause
end
```



Bazisne slike i signali

- Formirati bazisne signale za DHT sa $N=8$.

```
clear
```

```
N=8;
```

```
[n,k]=meshgrid(0:N-1,0:N-1);
```

```
H=cos(2*pi*n.*k/N)+sin(2*pi*n.*k/N);
```

```
G=inv(H);
```

```
for m=1:8
```

```
    for n=1:8
```

```
        baz=G(m,:)'*G(n,:);
```

```
        pcolor(baz)
```

```
        title(['bazisne slike za m=',num2str(m),' n=',num2str(n)])
```

```
        pause
```

```
    end
```

```
end
```