



Digitalna obrada slike

Lekcija IV

Slika i Fourierova transformacija



FT multidimenzionih signala

- Slika je **2D signal**.
- Definicija Fourierove transformacije 2D kontinualnog signala **$x(t_1, t_2)$** je:

$$X(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1, t_2) e^{-j\omega_1 t_1 - j\omega_2 t_2} dt_1 dt_2$$

- Inverznom Fourierovom transformacijom dobija se originalni signal:

$$x(t_1, t_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega_1, \omega_2) e^{j\omega_1 t_1 + j\omega_2 t_2} d\omega_1 d\omega_2$$



FT multidimenzionih signala

- Signal i Fourierova transformacija čine Fourierov (čita se Furije) transformacioni par.
- Ovaj par se može zapisati i u kompaktnijoj formi uvodeći vektore i omogućavajući da broj koordinata bude veći od 2:


$$\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_Q)$$

$$\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_Q)$$

- Fourierova transformacija se može kompaktno napisati kao:

$$X(\vec{\omega}) = \int_{\vec{t}} x(\vec{t}) e^{-j\vec{\omega}\vec{t}} d\vec{t}$$

$$d\vec{t} = dt_1 dt_2 \dots dt_Q \quad \int_{\vec{t}} = \int_{t_1=-\infty}^{\infty} \int_{t_2=-\infty}^{\infty} \dots \int_{t_Q=-\infty}^{\infty}$$


$$\vec{\omega}\vec{t} = \omega_1 t_1 + \dots + \omega_Q t_Q$$



FT multidimenzionih signala

- Inverzna multidimenziona Fourierova transformacija:

$$x(\vec{t}) = \frac{1}{(2\pi)^Q} \int_{\vec{\omega}} X(\vec{\omega}) e^{j\vec{\omega}\vec{t}} d\vec{\omega}$$

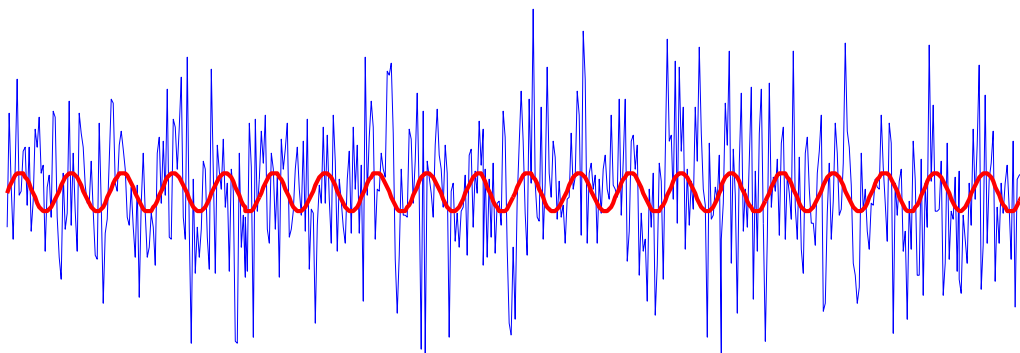
- Zadovoljićemo se sa 2D signalima.
- Nećemo koristiti FT analognih signala jer mi baratamo sa diskretnim signalima.
- Prije nego pređemo na “priču” o diskretnim signalima dajemo nekoliko komentara vezanih za FT generalno.



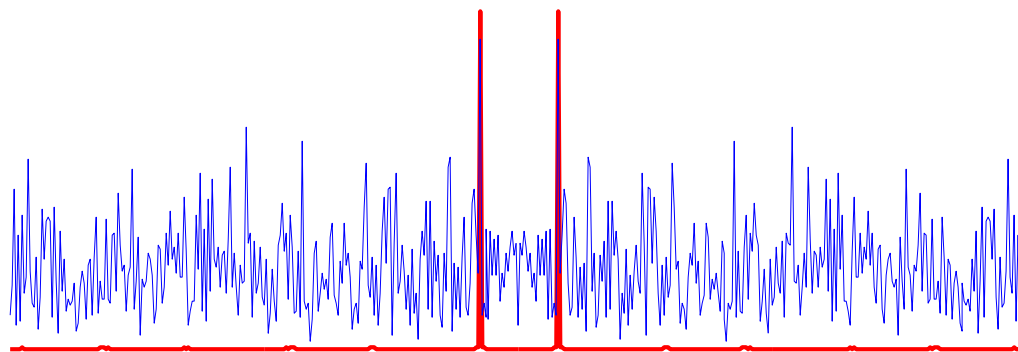
Fourierova transformacija

- Između signala i FT postoji preslikavanje "1 na 1".
- Odnosno grubo govoreći riječ je o prikazu istog signala (iste fizičke veličine) na dva različita načina (u dva različita domena).
- Da stvar bude još interesantnija FT i inverzna FT imaju veoma slične definicije (jedna konstanta se uvodi kod inverzne transformacije što se može i izbjeći i mijenja se znak u eksponentu komplekse sinusoide).
- Dakle, ostaje misterija što će nam FT uopšte?

Motivacija za uvođenje FT



signal u vremenskom domenu



signal u frekventnom domenu

Kao motivišući primjer smo posmatrali sinusoidu koja je data crvenom linijom. Na donjem grafiku je data njena FT koja jasno predstavlja sumu dva Dirakova impulsa.

Ako sinusoidi dodamo veliki šum dobijamo signal dat plavom linijom. Ovdje je nemoguće prepoznati sinusoidu. Ali iz FT se dosta jasno i dalje uočavaju dva spektralna maksimuma. Dakle u FT domenu se sinusoida i dalje vidi.



Motivacija za uvođenje FT

- Grubo govoreći neki signali se bolje prikazuju u frekventnom nego u vremenskom domenu.
- Stoga se u frekventnom domenu mogu jednostavno dizajnirati filtri koji bi recimo propustili dio FT gdje se nalazi sinusoida a odsjekli ostatak FT gdje nema sinusoide i na taj način umanjili uticaj smetnji na sinusoidu.
- Slična je motivacija i za uvođenje nekih drugih tipova transformacija sa njihovom domenima ali ćemo njima posvetiti više prostora kasnije.
- Slična motivaciona priča važi kod 2D signala pa i slike.



2D FT diskretnih signala

- Mi ćemo raditi sa diskretnim signalima.
- Stoga se na osobine 2D FT analognih signala nećemo zadržavati i preporučićemo vam knjigu da ih tamo pronađete.
- Da bi iz analognog signala dobili diskretni treba izvršiti odabiranje.
- Kod 1D signala odabiranje je jednostavno. Umjesto analognog signala uzimaju se odbirci koji su ekvidistantno raspoređeni:

$$x(n) = c x_a(nT)$$

konstanta (obično se usvaja $c=T$)

diskretizovani signal

analogni signal (T je korak odabiranja)



2D FT diskretnih signala

- Naravno da bi se na osnovu diskretnog signala mogao rekonstruisati analogni potrebno je da bude zadovoljena teorema o odabiranju.
- Po ovoj teoremi rekonstrukcija je moguća ako je korak odabiranja:
$$T \leq 1/2 f_m$$

↗ maksimalna frekvencija signala
- Ako ovo nije zadovoljeno pravi se greška koja u zavisnosti od prirode signala može biti manja ili veća.
- Kako odabirati kod slike?



Odabiranje kod 2D signala

- Najjednostavnije odabiranje kod slike je:

$$x(n,m) = c \, x_a(n \, T_1, m \, T_2)$$

Konstanta je sada obično selektovana da bude jednaka $c = T_1 \, T_2$.

Korak odabiranja po koordinatama ne mora biti jednak ali je po nepisanom pravilu $T_1 = T_2$.

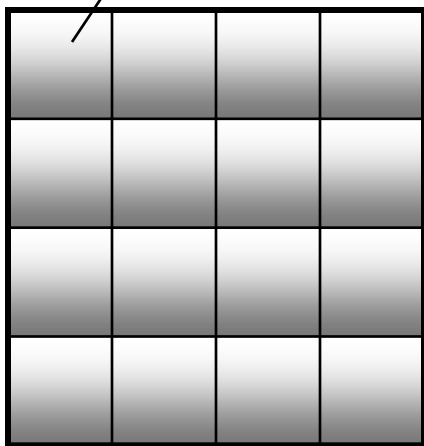
Teorema o odabiranju je ovdje zadovoljena ako važi:

$T_1 \leq 1/2 f_{m1}$ i $T_2 \leq 1/2 f_{m2}$. Ovdje su sada f_{m1} i f_{m2} maksimalne frekvencije duž odgovarajućih koordinata (uočite da 2D FT analognog signala ima dvije koordinate ω_1 i ω_2 i f_{m1} i f_{m2} odgovaraju maksimumima frekvencije po ovim koordinatama $f_{mi} = \omega_{mi}/2\pi$).

Odabiranje kod 2D signala

- Prethodno definisano odabiranje koje se naziva **pravougaonim** nije i jedino moguće.
- Kod pravougaonog odabiranja dobija se da se pravougaonik analogne slike mijenja sa odbirkom:

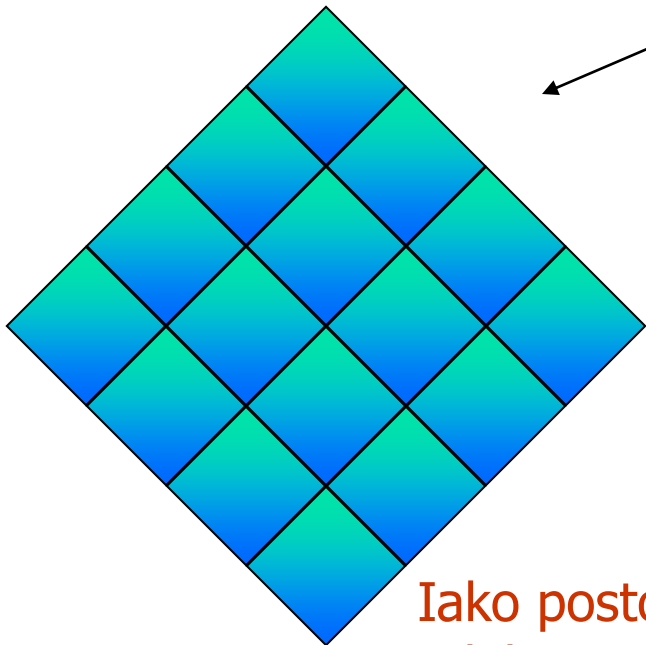
čitav ovaj pravougaonik se mijenja sa jednim odbirkom



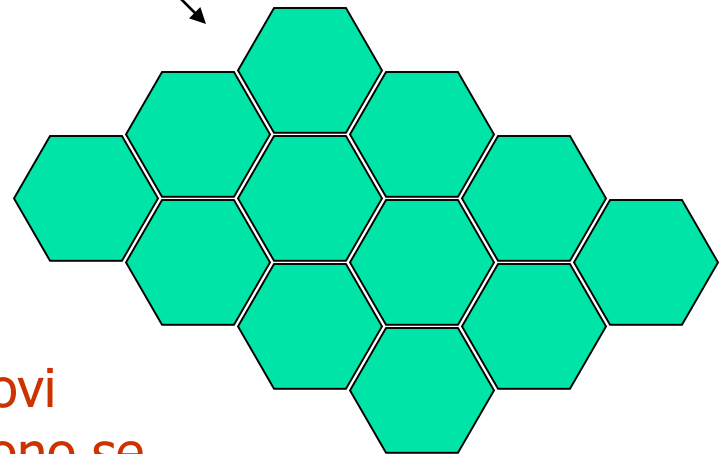
Opet napominjemo da ne postoji obaveza da se vrši ovakvo odabiranje ali je praktično.

Odabiranje kod 2D signala

- Odabiranje se može vršiti i u drugim oblicima zone za odabiranje:



Npr. to može biti oblik romba a u literaturi je pokazano da je najbolji jednakostranični šestougao.



Iako postoje bolji tipovi odabiranja pravougaono se koristi zbog jednostavnosti !!!



Kvantizacija

- Rijetko se kada direktno koristi diskretizovani signal već se pristupa njegovoj kvantizaciji.
- Umjesto tačnih vrijednosti uzimaju se one vrijednosti koje su pridružene tačno određenom skupu mogućih vrijednosti (kvantovima).
- Pridruživanje kvantovima se obavlja zaokruživanjem ili odsjecanjem.
- Kod zaokruživanja dolazi do uzimanja vrijednosti najbližeg kvanta dok kod odsjecanja dio koji preteče u odnosu na manji kvant od date vrijednosti se odsjeca.



Kvantizacija

- Kvantizacija se obično provodi uniformno (razmak između kvantova je uniforman) ali to ne mora biti slučaj jer se kod nekih senzora provodi i neuniformna kvantizacija.
- Broj kvantizacionih nivoa je obično 2^k pa se onda kvantovi prikazuju cijelim brojevima od 0 do 2^k-1 .
- Gotovo uvijek ćemo smatrati da imamo **diskretizovani** i **kvantizovani** signal na raspolaganju (takav se signal naziva **digitalizovani**).



2D FT diskretnog signala

- Fourierov transformacioni par između diskretizovanog i odgovarajuće FT se obrazuje na osnovu sledećih relacija:

$$X(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n, m) e^{-j\omega_1 n - j\omega_2 m}$$

$$x(n, m) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\omega_1=-\pi}^{\pi} \int_{\omega_2=-\pi}^{\pi} X(\omega_1, \omega_2) e^{j\omega_1 n + j\omega_2 m} d\omega_1 d\omega_2$$

2D FT diskretnog signala je analogna veličina što je čini nepogodnom za računarske aplikacije.

2D FT je periodična po obje koordinate sa periodom 2π .

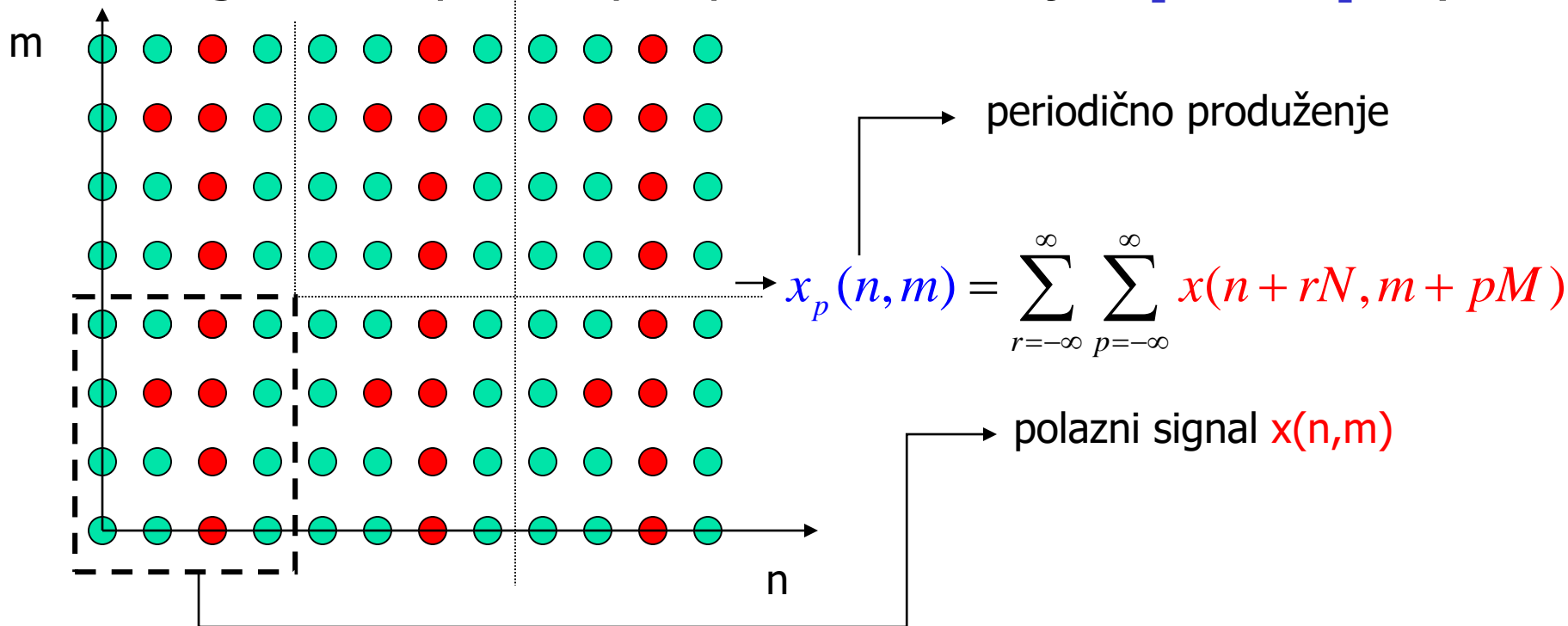


2D DFT

- Pošto 2D FT diskretnih signala nećemo koristiti, nećemo objašnjavati druge njene osobine u detalje.
- Cilj nam je da dobijemo diskretizovanu verziju ove transformacije kako bi mogli da baratamo sa njom pomoću računara.
- Da bi to uradili moramo iskoristiti osobinu **periodičnosti** odnosno **periodičnog produženja**.
- Naime, pretpostavimo da je signal **$x(n,m)$** ograničenog trajanja (kod digitalne slike to je uvijek slučaj).
- Neka je veličina signala (slike) **$N \times M$** .

2D DFT

- Izvršimo periodično produženje ovog signala sa periodom $N_1 \times M_1$ (mora važiti $N_1 \geq N$ i $M_1 \geq M$ a bez gubitka opštosti pretpostavimo da je $N_1 = N$ i $M_1 = M$).

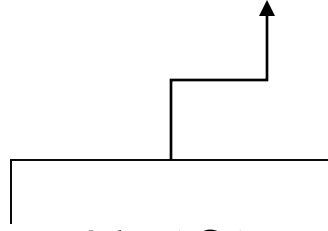




2D DFT

- FT periodično produženog signala je:

Analogni Dirakovi impulsi (generalizovane funkcije) kao posljedica sumiranja po beskonačno mnogo produženja

$$\begin{aligned} X_p(\omega_1, \omega_2) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x(n+rN, m+pM) e^{-j\omega_1 n - j\omega_2 m} = \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n, m) e^{-j\omega_1 n - j\omega_2 m} e^{jrN\omega_1 + jpM\omega_2} = \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} X(\omega_1, \omega_2) e^{jrN\omega_1 + jpM\omega_2} = X(\omega_1, \omega_2) \delta(\omega_1 N - 2k_1\pi) \delta(\omega_2 M - 2k_2\pi) \end{aligned}$$


Prilikom izvođenja vršene su dozvoljene zamjene mjesta suma, korišćene su osobine FT pomjerenog signala uz eventualno zanemarivanje određenih multiplikativnih konstanti.



2D DFT

- Konačno dobijamo da važi da je:

$$X_p(\omega_1, \omega_2) = X\left(\frac{2k_1\pi}{N}, \frac{2k_2\pi}{M}\right)$$

- Dakle, FT periodično produženog signala jednaka je odbircima 2D FT diskretnog signala koji su uzeti u tačkama $k_1 \in [0, N)$ i $k_2 \in [0, M)$.
- Periodično produženje signala vodi ka diskretnoj FT (DFT).
- Ona se u praksi rijetko provodi zbog potrebe za beskonačnim sumiranjem i baratanjem generalisanim funkcijama.
- Međutim, treba imati na umu da je ono podrazumijevano i da se mora obaviti sa najmanjom periodom koja je jednaka $N \times M$.



2D DFT

- 2D diskretni signal i 2D DFT čine transformacioni par

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x(n, m) e^{-j\frac{2\pi k_1 n}{N} - j\frac{2\pi k_2 m}{M}}$$

Svede se na FT diskretnog signala računatu na ograničenom intervalu za diskretizovane frekvencije.

$$x(n, m) = \frac{1}{NM} \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{M-1} X(k_1, k_2) e^{j\frac{2\pi k_1 n}{N} + j\frac{2\pi k_2 m}{M}}$$

Važna činjenica: Inverzna DFT se računa na potpuno isti način kao i direktna (preko suma). Razlike su samo "kozmetičke prirode" (minus u eksponentu kompleksne sinusoide i normalizaciona konstanta $1/NM$).



Domeni 2D DFT i FT disk. signala

- Domen 2D FT diskretnog signala je Dekartov proizvod:

$$(\omega_1, \omega_2) \in [-\pi, \pi) \times [-\pi, \pi)$$

[označava da granica pripada intervalu

(označava da granica ne pripada intervalu

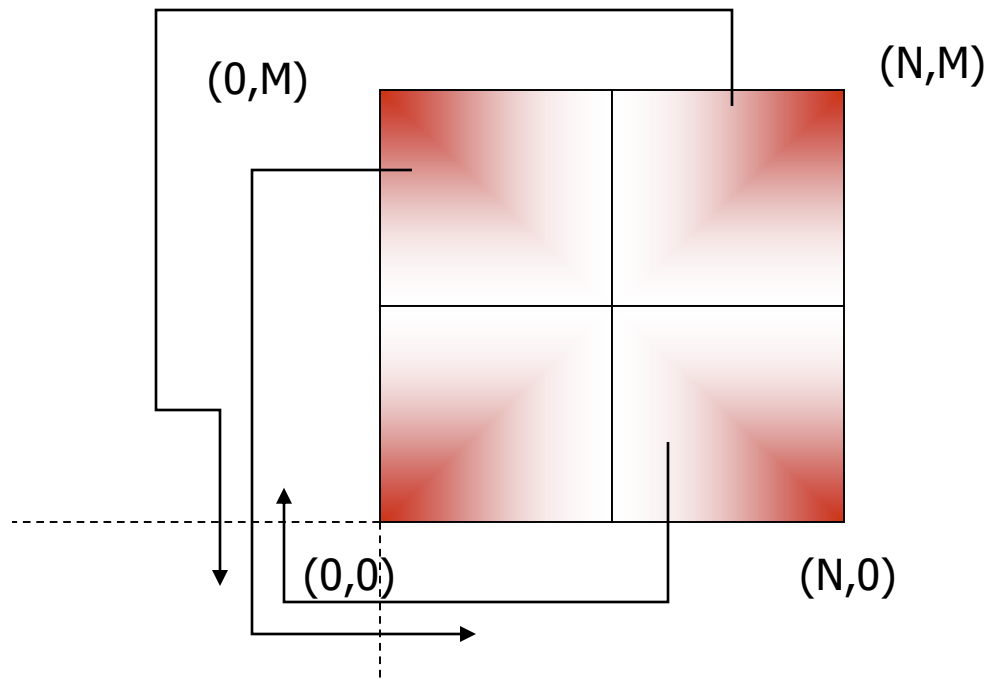
- Domen 2D DFT je diskretni skup tačaka $(k_1, k_2) \in [0, N) \times [0, M)$.

- Treba uspostaviti vezu ova dva domena!!!

- Veze $\omega_1 = 2\pi k_1 / N$ i $\omega_2 = 2\pi k_2 / M$ mogu da važe samo za $0 \leq k_1 < N/2$ i $0 \leq k_2 < M/2$ dok bi za veće k_1 i k_2 ova veza dovela do izlaska iz dozvoljenog ω_1 i ω_2 domena.

Domeni 2D DFT i FT disk. signala

- Za veće k_1 i k_2 može se koristiti činjenica da je 2D FT diskretnog signala periodična po obje koordinate ω_1 i ω_2 sa periodom 2π tako da važe veze:
 $\omega_1 = 2(N-k_1)\pi/N$ i $\omega_2 = 2(M-k_2)\pi/M$ za $N/2 \leq k_1 < N$ i $M/2 \leq k_2 < M$.



Strelice pokazuju gdje se koji "kvadrant" 2D DFT treba pomjeriti da bi se dobile frekvencije raspoređene u prirodnom redosljedu.

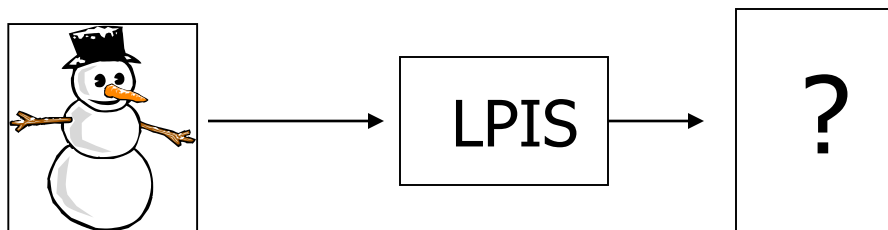


FFTSHIFT

- Postoji i alternativan način da se odradi fftshift odnosno dovođenje odbiraka FFT u pravilan raspored.
- Ta alternativa podrazumijeva da se slika pomnoži sa $(-1)^{n_1+n_2}$ pa da se FFT sračuna za takvu sliku.
- Premda izgleda komplikovano suštinski samo treba promijeniti predznak pikselima slike koji imaju n_1+n_2 neparno.
- U tom slučaju nije potrebno vršiti fftshift operaciju nakon proračuna FFT.
- Dokazati!
- Razmotriti što je od ovo dvoje jednostavnije (FFT slike pa fftshift ili promjena predznaka određenog broja koeficijenata pa FFT slike bez fftshifta).

2D DFT, konvolucija i LPIS

- Digitalna slika se podvrgava različitim tipovima obrada podataka.
- Pretpostavimo da sliku dovodimo na ulaz linearnog prostorno invarijantnog sistema:



mada ovakvi sistemi mogu imati različite namjene mi ćemo ih za sada razmatrati u filtriranju ili uklanjanju šuma

- Sistem je linearan ako **linearna kombinacija ulaza** daje **linearnu kombinaciju izlaza**:

Ako $x(n,m)$ ulaz i $T\{x(n,m)\}$ transformacija tog ulaza dobijena na izlazu iz LPIS tada važi:

$$T\{ax_1(n,m)+bx_2(n,m)\}=aT\{x_1(n,m)\}+bT\{x_2(n,m)\}$$

2D DFT, konvolucija i LPIS

- Sistem je prostorno invarijantan (ovo je samo proširenje koncepta vremenske invarijantnosti) ako transformacija pomjerene slike daje pomjeraj u obrađenoj slici:

Ako je $y(n,m)=T\{x(n,m)\}$ tada važi
 $y(n-n_0,m-m_0)=T\{x(n-n_0,m-m_0)\}$.

- LPIS imaju zgodnu osobinu da se njihov izlaz može opisati konvolucijom ulaza i odziva na 2D jedinični Dirakov impuls:

$$y(n,m)=x(n,m)*_{n*m}h(n,m)$$

Zbog ograničenja u domenu slike, zaokruživanja, i diskretne veličine slike sistemi koji obrađuju digitalnu sliku su rijetko kad LPIS ali se barem neki od njih mogu aproksimirati sa LPIS.

Oznaka 2D konvolucije



2D DFT, konvolucija i LPIS

- $h(n,m)=T\{\delta(n,m)\}$ gdje je:

$$\delta(n,m) = \begin{cases} 1 & \text{za } n=0 \text{ i } m=0 \\ 0 & \text{drugdje} \end{cases}$$

- Pretpostavimo da je impulsni odziv konačan $N_1 \times M_1$.
Tada se **linearna konvolucija** (može samo i konvolucija pošto mi druge oblike nećemo razmatrati) definiše kao:

$$\underline{y(n,m) = T\{x(n,m)\} = x(n,m) *_n *_m h(n,m)}$$

↓

Domen izlaza je sada:

$[0, N+N_1-1) \times [0, M+M_1-1)$!!!!

$$= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_1=0}^{M_1-1} h(n_1, m_1) x(n - n_1, m - m_1)$$



2D DFT konvolucija i LPIS

- O veličini izlaza se mora voditi računa u jednoj veoma značajnoj konkretnoj aplikaciji.
- Tradicionalno znamo da je FT konvolucije dva signala jednaka proizvodu FTa ta dva signala.
- Da bi se taj rezultat ponovio kod diskretnih signala i 2D DFT treba uraditi sledeće korake:
 - Proširiti polazni signal nulama do domena $[0, N+N_1-1) \times [0, M+M_1-1)$.
 - Istu operaciju odraditi i sa impulsnim odzivom.
 - Odrediti 2D DFT signala i impulsnog odziva.
 - Pomnožiti dobijene 2D DFT i odredimo inverznu 2D DFT.



2D DFT konvolucija i LPIS

- Zapišimo prethodno opisane korake u matematičkoj formi:

$$x'(n, m) = \begin{cases} x(n, m) & n \in [0, N) \wedge m \in [0, M) \\ 0 & n \in [N, N + N_1) \vee m \in [M, M + M_1 - 1) \end{cases}$$

$$h'(n, m) = \begin{cases} h(n, m) & n \in [0, N_1) \wedge m \in [0, M_1) \\ 0 & n \in [N_1, N + N_1) \vee m \in [M_1, M + M_1 - 1) \end{cases}$$

$$X'(k_1, k_2) = \sum_{n=0}^{N+N_1-2} \sum_{m=0}^{M+M_1-2} x'(n, m) e^{-j \frac{2\pi k_1 n}{N+N_1-1} - j \frac{2\pi k_2 m}{M+M_1-1}}$$

$$H'(k_1, k_2) = \sum_{n=0}^{N+N_1-2} \sum_{m=0}^{M+M_1-2} h'(n, m) e^{-j \frac{2\pi k_1 n}{N+N_1-1} - j \frac{2\pi k_2 m}{M+M_1-1}}$$



2D DFT konvolucija i LPIS

$$y(n, m) = \frac{1}{(N + N_1 - 1)(M + M_1 - 1)} \times \sum_{k_1=0}^{N+N_1-2} \sum_{k_2=0}^{M+M_1-2} X'(k_1, k_2) H'(k_1, k_2) e^{j \frac{2\pi k_1 n}{N+N_1-1} + j \frac{2\pi k_2 m}{M+M_1-1}}$$

Postoje situacija kada je računanje konvolucije pomoću tri 2D DFT kao što je ovdje bio slučaj brže nego direktnim putem.

Da bi to zapravo bilo moguće 2D DFT se ne može računati korišćenjem sume već se moraju primjeniti brzi algoritmi.



Potreba za brzim algoritmima

- U okviru kursa Digitalna obrada signala uvedena su dva najjednostavnija algoritma za brzo izračunavanje:
 - **algoritam za razbijanje po vremenu** (decimation in time) i
 - **algoritam za razbijanje po frekvenciji** (decimation in frequency)
- Važnost ovih algoritama u obradi slike je znatno veća zbog broja podataka koje u slici treba obraditi.
- Slobodno se može reći da savremene obrade slike ne bi bilo bez FFT algoritama (**FFT nije posebna transformacija već samo brzi način za izračunavanje DFT!!!**).



Potreba za brzim algoritmima

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x(n, m) e^{-j \frac{2\pi k_1 n}{N} - j \frac{2\pi k_2 m}{M}}$$

- Za jednu tačku direktno računanje zahtjeva $N \times M$ kompleksnih množenja (**kompleksno množenje je 4 realna množenja i dva sabiranja**) i $N \times M$ kompleksnih sabiranja (**2 realna sabiranja svako**). Za svako k_1, k_2 treba sve to ponoviti $N \times M$ puta. To znači da je ukupno potrebno **reda veličine**:

$N^2 M^2$ kompleksnih sabiranja ($2N^2 M^2$ realnih)

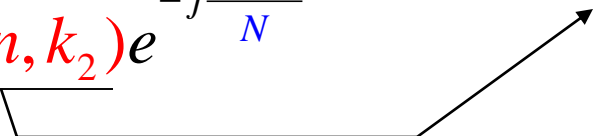
$N^2 M^2$ kompleksnih množenja ($4N^2 M^2$ realnih + $2N^2 M^2$ realna sabiranja)

Npr. $N=M=1024$ na računaru koji može da uradi 1×10^9 operacija u jednoj sekundi zahtjeva: $8N^2 M^2 > 8 \times 10^{12}$ realnih operacija odnosno oko 8×10^3 sek što je više od 2h.



Brzi korak-po-korak algoritam

2D DFT se može izraziti kao:

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{M-1} x(n, m) e^{-j \frac{2\pi k_2 m}{M}} \right] e^{-j \frac{2\pi k_1 n}{N}} = \text{1D DFT vrste slike}$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}(n, k_2) e^{-j \frac{2\pi k_1 n}{N}}$$


- Sledeća suma predstavlja Fourierove transformacije kolona međurezultata.
- Sve primjenjene DFT su 1D i ukupno ih ima N+M.
- Svaka 1D DFT se može realizovati preko brzog algoritma.



Korak po korak algoritam

- Pojednostavimo priču i neka je $N=M$.
- Za svako FFT po kolonama i vrstama nam treba $N \log_2 N$ kompleksnih sabiranja i množenja a ukupno je ovakvih operacija za svaku tačku u ravni:
 $2N \times N \log_2 N$ kompleksnih sabiranja i množenja.
- Ovo se svede na oko $8N^2 \log_2 N$ realnih sabiranja i množenja odnosno ukupno $16N^2 \log_2 N$ operacija.
- Za $N=M=1024$ potreban broj operacija je nešto veći od 160×10^6 . Odnosno na usvojenom procesoru to je **0.16s.**



Korak po korak algoritam

- U koracima ovog algoritma mogu da budu oba koja su već upotrebljavana za 1D signale:
 - decimation in time (razbijanje po vremenu)
 - decimation in frequency (razbijanje po frekvenciji).
- Brzina ova dva algoritma je približna.
- Korak po korak algoritam nije ni na koji način optimalan ali je veoma popularan zbog svoje jednostavnosti.
- Ranije na računarskim mašinama a danas na nekim prenosnim sredstvima koja mogu biti oskudna sa memorijom izbjegava se jer postoji problem sa memorisanjem 3 matrice:
 - originalne slike
 - međurezultata (kompleksna matrica koja se pamti kao dvije realne)
 - konačne 2D DFT (koja je opet kompleksna)



Korak po korak algoritam - memorija

- Praktično nam za smještaj rezultata kod korak po korak algoritma treba 5 realnih matrica dimenzija slike.
- Srećna okolnost je da je sama slika realan signal pa važi pravilo:

$$\begin{aligned} X^*(k_1, k_2) &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x(n, m) e^{+j\frac{2\pi k_1 n}{N} + j\frac{2\pi k_2 m}{M}} = && \text{prilikom konjugovanja} \\ &&& \text{važi } \mathbf{x^*(n,m)=x(n,m)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x(n, m) e^{-j\frac{2\pi(N-k_1)n}{N} - j\frac{2\pi(M-k_2)m}{M}} = X(N - k_1, M - k_2) \end{aligned}$$

U knjizi pogledajte kako se ovo može iskoristiti za uštedu memorijskog prostora!!!



Napredni algoritmi za 2D FFT

- Napredni algoritmi za FFT kod slike vrše razbijanja direktno po obje koordinate.

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(n, m) W_N^{nk_1} W_N^{mk_2}$$

$$W_N = \exp(-j2\pi/M)$$

Pretpostavljeno je $N=M$

Razbijmo ovu DFT na 4 podsume sa parnim i neparnim elementima po pojedinim koeficijentima

$$\begin{aligned} X(k_1, k_2) = & \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ parno}}}^{N-1} \sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ parno}}}^{N-1} x(n, m) W_N^{nk_1} W_N^{mk_2} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ parno}}}^{N-1} \sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ neparno}}}^{N-1} x(n, m) W_N^{nk_1} W_N^{mk_2} + \\ & + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ neparno}}}^{N-1} \sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ parno}}}^{N-1} x(n, m) W_N^{nk_1} W_N^{mk_2} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ neparno}}}^{N-1} \sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ neparno}}}^{N-1} x(n, m) W_N^{nk_1} W_N^{mk_2} \end{aligned}$$



Napredni algoritmi za 2D FFT

- Nakon svođenja svih suma u granice od **[0,N/2)×[0,N/2)**

$$X(k_1, k_2) = S_{00}(k_1, k_2) + S_{01}(k_1, k_2)W_N^{k_2} + S_{10}(k_1, k_2)W_N^{k_1} + S_{11}(k_1, k_2)W_N^{k_1+k_2}$$

gdje je

$$S_{00}(k_1, k_2) = \sum_{m_1=0}^{N/2-1} \sum_{m_2=0}^{N/2-1} x(2m_1, 2m_2) W_N^{2m_1k_1+2m_2k_2}$$

$$S_{01}(k_1, k_2) = \sum_{m_1=0}^{N/2-1} \sum_{m_2=0}^{N/2-1} x(2m_1, 2m_2 + 1) W_N^{2m_1k_1+2m_2k_2}$$

$$S_{10}(k_1, k_2) = \sum_{m_1=0}^{N/2-1} \sum_{m_2=0}^{N/2-1} x(2m_1 + 1, 2m_2) W_N^{2m_1k_1+2m_2k_2}$$

$$S_{11}(k_1, k_2) = \sum_{m_1=0}^{N/2-1} \sum_{m_2=0}^{N/2-1} x(2m_1 + 1, 2m_2 + 1) W_N^{2m_1k_1+2m_2k_2}$$



Napredni 2D FFT algoritmi

- 2D DFT se sada može zapisati u zavisnosti od **(k_1, k_2)** kombinacije kao:

$$X(k_1, k_2) = S_{00}(k_1, k_2) + W_N^{k_2} S_{01}(k_1, k_2) + W_N^{k_1} S_{10}(k_1, k_2) + W_N^{k_1+k_2} S_{11}(k_1, k_2)$$

$$\text{za } 0 \leq k_1 \leq N/2 - 1 \quad 0 \leq k_2 \leq N/2 - 1$$

$$X(k_1 + \frac{N}{2}, k_2) = S_{00}(k_1, k_2) + W_N^{k_2} S_{01}(k_1, k_2) - W_N^{k_1} S_{10}(k_1, k_2) - W_N^{k_1+k_2} S_{11}(k_1, k_2)$$

$$\text{za } 0 \leq k_1 \leq N/2 - 1 \quad 0 \leq k_2 \leq N/2 - 1$$

$$X(k_1, k_2 + \frac{N}{2}) = S_{00}(k_1, k_2) - W_N^{k_2} S_{01}(k_1, k_2) + W_N^{k_1} S_{10}(k_1, k_2) - W_N^{k_1+k_2} S_{11}(k_1, k_2)$$

$$\text{za } 0 \leq k_1 \leq N/2 - 1 \quad 0 \leq k_2 \leq N/2 - 1$$

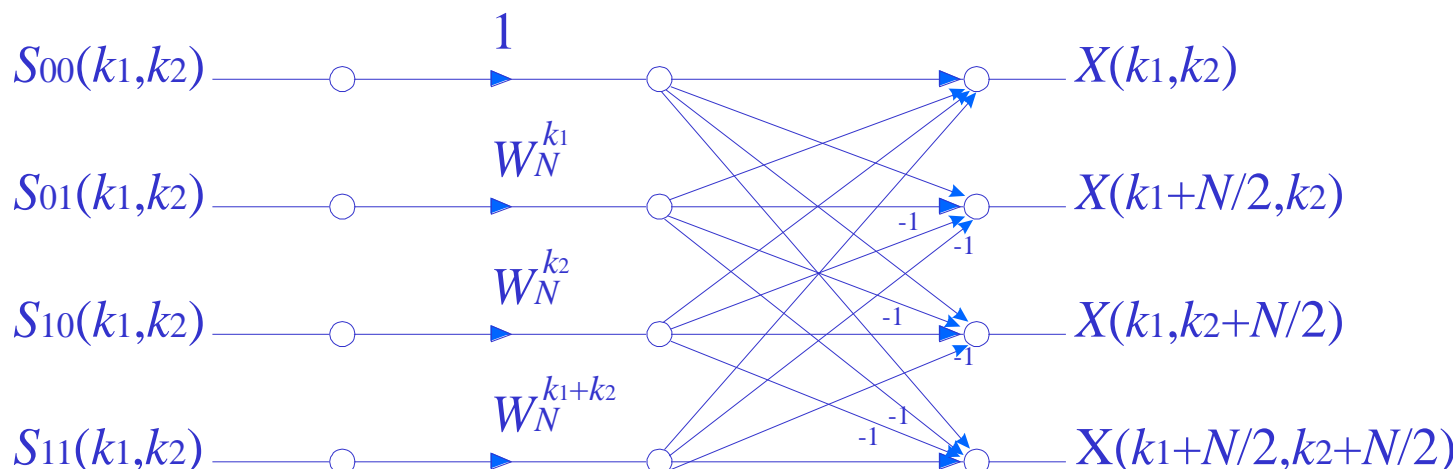
Napredni 2D FFT algoritmi

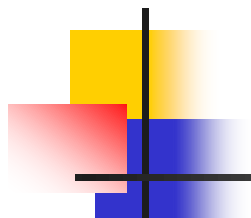
Konačno:

$$X(k_1 + \frac{N}{2}, k_2 + \frac{N}{2}) = S_{00}(k_1, k_2) - W_N^{k_2} S_{01}(k_1, k_2) - W_N^{k_1} S_{10}(k_1, k_2) + W_N^{k_1+k_2} S_{11}(k_1, k_2)$$

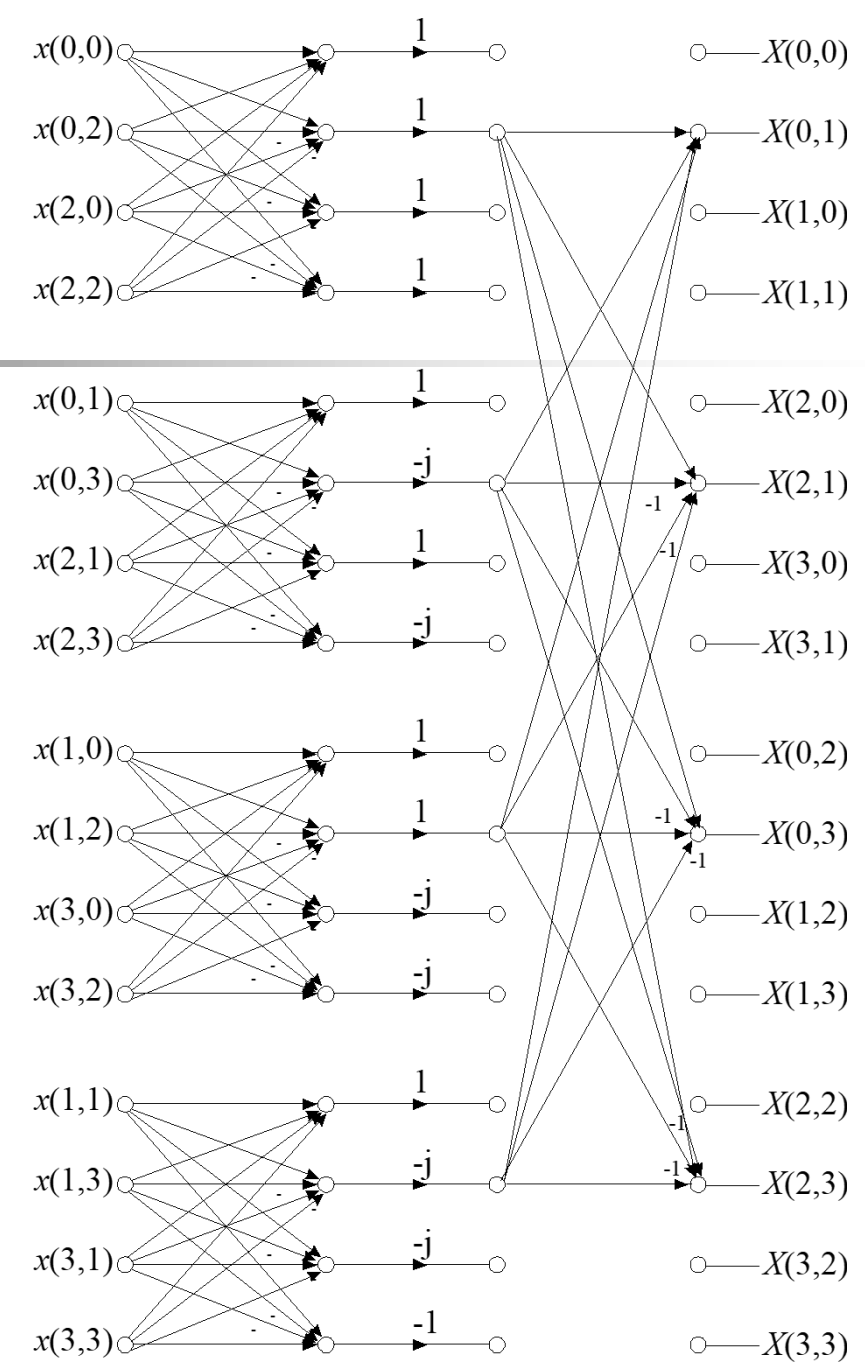
$$\text{za } 0 \leq k_1 \leq N/2 - 1 \quad 0 \leq k_2 \leq N/2 - 1$$

Dekompozicija se može prikazati preko sledeće latice:





- Dekompozicija se može nastaviti u svakom pojedinačnom $S_{ij}(k_1, k_2)$ bloku. Šema “razbijanja” slike sa 4x4 piksela.





Napredni 2D FFT algoritmi

- Broj kompleksnih množenja za ovakav tip FFT algoritma je **$3N^2\log_2 N/4$** dok je broj kompleksnih sabiranja reda veličine **$2N^2\log_2 N$** .
- Realnih množenja je: **$3N^2\log_2 N$** dok je broj realnih sabiranja reda veličine **$5.5N^2\log_2 N$** .
- Ukupan broj operacija je reda veličine jedne polovine onih kod algoritma korak po korak.
- **Postoji mnoštvo varijanti FFT algoritama!!!**



Karakteristike DFT realne slike

- U MATLAB-u se 2D DFT slike računa pomoću naredbe:

- `F=fftshift(fft2(I))`

slika

naredba za računanje 2D
DFT preko FFT algoritama

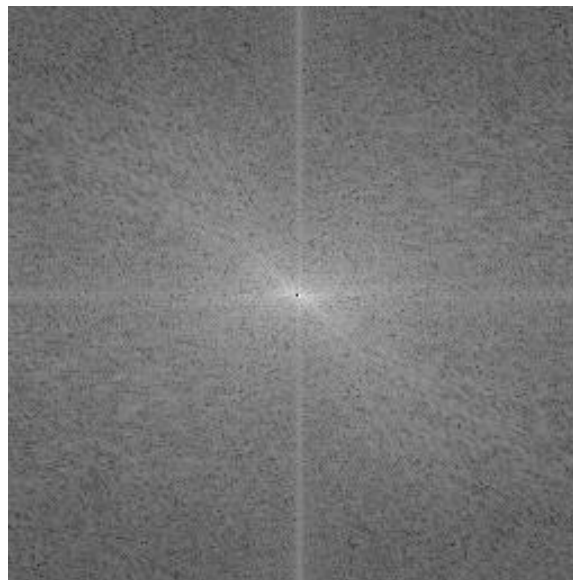
naredba koja vrši prebacivanje odbiraka FFT
u prirodan raspored (pogledati slajd 22)

Na narednom slajdu prikazana je poznata test slika **Lena** i **logaritam njene 2D DFT** (bijele pozicije predstavljaju veće vrijednosti a tamne manje).

Karakteristike 2D DFT



Test slika Lena



2D FFT

vrijednost oko sredine koje odgovaraju $(\omega_x, \omega_y) = (0, 0)$ i koje su bijele su i do 10^{10} i više puta veće od tamnih pozicija



Karakteristike 2D DFT

- U posmatranoj slici Lena dimenzija 256×256 piksela manje od 10 odbiraka 2D DFT koncentrisanih u centralnom dijelu sadrži preko **99%** energije.
- Znači li to da se umjesto čitave slike može pamtit i samo 10 odbiraka 2D DFT (u poređenju sa 256×256 piksela)?
- Odgovor je **NE, NE i NE!!!**
- Naime jeste da se u ovoj oblasti nalazi glavnina energije signala ali to je uglavnom vezano za osvjetljaj slike dok se detalji slike koji bitno utiču na kvalitet vizije nalaze na većim frekvencijama.
- Ovo je dosta bitna karakteristika ljudskih čula: komponente male energije na visokim frekvencijama nose glavninu informacija koje ljudi primaju.
- Visokofrekventne komponente zbog male energije su podložne uticaju šuma.



Za samostalni rad

- Slika je pretpostavljeno realna veličina. Odrediti osobine 2D DFT koje važe za realne veličine.
- Dokazati osobine 2D FT analognog signala iz Tabele 4.1 iz knjige. Da li i u kom obliku ove osobine važe kod 2D FT diskretnog signala i kod 2D DFT?
- Pretpostaviti da je umjesto pravougaone mreže diskretizacija signala obavljena nekim drugim oblikom (npr. pomoću romba ili pomoću šestougaoonog odabiranja). Odrediti rekonstrukciju originalnog signala na osnovu ovakvih odbiraka.
- Posmatrajte konvoluciju 2D signala. Da li i kada računanje konvolucije može biti efikasnije korišćenjem 2D DFT?
- Na predavanjima je prikazan je jedan algoritam za 2D FFT razbijanjem na 4 podsekvence. Kojoj grupi algoritama pripada ovaj algoritam (decimation in time ili decimation in frequency)?



Za samostalan rad

- Realizovati 2D FFT algoritam korišćenjem druge metode razbijanja.
- Da li je moguće kombinovanje metoda razbijanja. Recimo decimation in frequency po jednoj a decimation in time po drugoj koordinati? Ako je moguće realizovati ovakav algoritam i prikazati šemu potpunog razbijanja 4×4 slike. Ako nije objasniti zbog čega.
- Pomoću dopunjavanja nulama 2D DFT izvršiti interpolaciju slike!!!
- Uradite zadatke iz knjige koji su u posebnom poglavlju na kraju svake glave.